

REGIMURI OPTIME DE DIRIJARE A TRACȚIUNII UNOR RACHETE

DE

PETRE BRĂDEANU¹⁾ și ION PĂVĂLOIU¹⁾

533 :629.136/3

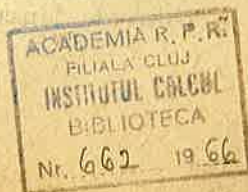
Mișcarea rachetelor, balistice sau cosmice, după un program optim de funcționare a motorului și dirijare a direcției tracțiunii, care să asigure stabilitatea, mărirea continuă a bătăii sau energiei rachetei, este astăzi una din cele mai importante probleme ale teoriei și tehnicii rachetelor.

Problema folosirii raționale, economice și rentabile a combustibilului rămâne actuală atita timp cit motorul rachetă funcționează cu combustibili clasici. Folosirea unui combustibil nuclear va diminua desigur importanța regimurilor optime de funcționare și consum pentru motoarele rachetă.

Cu problema regimului optim de dirijare a tracțiunii s-au ocupat D. Lawden, B. Fried și I. Richardson, H. Tsién etc., care au reușit să dea, sub diverse forme matematice, o teorie destul de generală a acestei probleme și, ca aplicații, să studieze pînă la capăt unele cazuri particulare simple, într-un număr foarte mic, a căror rezolvare prin evaluări corespundea metodei propuse.

În lucrarea de față ne vom ocupa cu stabilirea unui regim optim de dirijare a direcției tracțiunii unei rachete balistice și a unei rachete cosmice, în vederea obținerii unei bătăi maxime, respectiv energii maxime. Nu vom pune probleme de optim asupra regimului de funcționare a motorului, considerînd că acesta este dat. Folosind procedee deosebite de cele întîlnite la autorii citați mai sus, studiem, într-o formă exactă în cadrul teoriei mișcării relative, problema regimului optim de dirijare a tracțiunii în ipoteza că Pămîntul se mișcă în spațiu iar regimul de funcționare a motorului este cunoscut.

¹⁾ Universitatea „Babeș-Bolyai”, Cluj.



f. 114 poz.
2022

1. ECUAȚIILE MIȘCĂRII RACHETEI

Să presupunem că o rachetă balistică este lansată dintr-o poziție fixă O de pe suprafața Pământului și să ținem seama că Pământul este mobil în spațiu și anume că se rotește în jurul axei sale. Vom considera în punctul O sistemul de coordonate $Ox_1x_2x_3$ invariabil legat de Pământ. Neglijăm contribuția rotației rachetei asupra traiectoriei rachetei și traiectoriei centrului de greutate al rachetei.

Admițând postulatul mișcării corpului de masă variabilă și postulatul mișcării relative, ecuația mișcării relative a rachetei raportată la reperul mobil $Ox_1x_2x_3$ se obține din ecuația lui Newton

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

dacă se consideră că masa variază în raport cu timpul iar forța $\vec{F}$ conține forța direct aplicată $\vec{G} = m\vec{g}$ (forța gravitațională $m\vec{g}$ rezultantă a forței de atracție a Pământului și forței centrifuge), forța Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ și forța de tracțiune reactivă $\vec{P} = \frac{dm}{dt} \vec{u}$, unde $\vec{v}$ este viteza rachetei

față de $Ox_1x_2x_3$, m este masa, $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară a Pământului iar $\vec{u}$ este viteza efectivă de expulzare a gazelor în ajutorul rachetei.

Ecuația mișcării rachetei va avea deci forma

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{P}. \quad (1)$$

Împărțind ecuația (1) cu m și notînd $\frac{\vec{P}}{m} = \vec{f}$, $\vec{f}$ fiind accelerația reactivă, această ecuație devine

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{f}. \quad (2)$$

Considerăm acum reperul cartezian $Ox_1x_2x_3$. Axa Ox_1 este tangentă la Pământ și orientată spre sud, axa Ox_2 este verticala locului, îndreptată spre zenit, iar axa Ox_3 este perpendiculară în O pe Ox_1 și Ox_2 , astfel încît $Ox_1x_2x_3$ să formeze un reper direct în această ordine.

Notînd cu α unghiul pe care Ox_1 îl formează cu meridianul locului de lansare O , cu λ latitudinea geografică a punctului O și cu l_1 ,

l_2 și l_3 cosinuşii directori ai tracțiunii față de axele Ox_1 , Ox_2 și Ox_3 , avem proiecțiile

$$\vec{\omega} (-\omega \cos \lambda \cos \alpha, \omega \sin \lambda, -\omega \cos \lambda \sin \alpha), \vec{g} (0, -g, 0),$$

$$\vec{v} (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \vec{f} (fl_1, fl_2, fl_3).$$

Prin proiectarea ecuației de mișcare (2), pe axele triedrului ales, se obțin ecuațiile scalare ale mișcării în forma

$$\ddot{x}_1 + 2(\dot{x}_2 \omega \cos \lambda \sin \alpha + \dot{x}_3 \omega \sin \lambda) = fl_1, \quad (2')$$

$$\ddot{x}_2 + 2(-\dot{x}_1 \omega \cos \lambda \sin \alpha + \dot{x}_3 \omega \cos \lambda \cos \alpha) = fl_2 - g,$$

$$\ddot{x}_3 - 2(\dot{x}_1 \omega \sin \lambda + \dot{x}_2 \omega \cos \lambda \cos \alpha) = fl_3.$$

Vom presupune acum că tracțiunea se află în tot timpul acțiunii sale în planul Ox_1x_2 și atunci $l_3 = 0$. Vom presupune de asemenea că $\lambda = 0$ și $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ceea ce înseamnă că planul Ox_1x_2 coincide cu planul

ecuatorului. Din ecuația a treia a sistemului (2') rezultă, presupunînd că viteza inițială se află în planul Ox_1x_2 , că în tot timpul mișcării $\dot{x}_3 = 0$, că mișcarea are loc în planul Ox_1x_2 , adică în planul ecuatorului pămîntesc. Vom studia problema propusă într-un asemenea caz. Axa Ox_1 va fi tangentă la ecuator și îndreptată spre est iar axa Ox_2 , îndreptată spre zenit, este în planul ecuatorului. Presupunem că lansarea are loc spre est.

Ecuațiile mișcării plane a rachetei pe partea activă a traiectoriei, adică pe acea parte a traiectoriei pe care forța de tracțiune lucrează efectiv fiind diferită de zero, se vor deduce din (2') și au forma

$$\ddot{x}_1 + 2\omega \dot{x}_2 = fl_1, \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\omega \dot{x}_1 = fl_2 - g. \quad (4)$$

Pe partea pasivă a traiectoriei, unde tracțiunea este nulă, ecuațiile mișcării se vor deduce, în baza ipotezelor de mai sus, din (2') luînd $f = 0$,

$$\ddot{x}_1 + 2\omega \dot{x}_2 = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\omega \dot{x}_1 = -g. \quad (6)$$

Ecuațiile de mai sus sînt valabile, în ipotezele admise, atît pentru rachete balistice cit și pentru rachete cosmice sau purtătoare de sateliți artificiali ai Pământului.

A. RACHETE BALISTICE

2. CALCULUL DISTANȚEI ORIZONTALE DE ZBOR (BĂTAIA)

Pentru a calcula distanța de zbor a rachetei ar trebui să integrăm ecuațiile (3) — (4) corespunzătoare părții active și ecuațiile (5) — (6) corespunzătoare părții pasive. Pentru scopurile pe care le urmărim, în acest paragraf, nu este nevoie decât să integrăm ecuațiile (5) — (6) și să considerăm că poziția finală a părții active are coordonatele $A(q_1, q_2)$, rămânând ca q_1 și q_2 să fie determinați ulterior. Să notăm cu $\dot{q}_1$ și $\dot{q}_2$ vitezele, orizontală și verticală, ale rachetei în poziția A . Mărimile $\dot{q}_i$ sînt de asemenea necunoscute.

Să observăm că ecuațiile (5) — (6) sînt cu coeficienți constanți și nu cuprind funcțiile necunoscute ci numai derivatele lor. În consecință, aceste ecuații se pot integra odată obținînd,

$$\dot{x}_1 + 2\omega x_2 = c_1,$$

$$\dot{x}_2 - 2\omega x_1 = -gt + c_2.$$

Integrarea acestor ecuații, cu condițiile inițiale

$$x_1(0) = q_1, x_2(0) = q_2, \dot{x}_1(0) = \dot{q}_1, \dot{x}_2(0) = \dot{q}_2,$$

este imediată și conduce la soluțiile

$$x_1(t) = q_1 - \frac{\dot{q}_2}{2\omega} + \frac{\dot{q}_2}{2\omega} \cos 2\omega t + \frac{2\omega \dot{q}_1 - g}{4\omega^2} \sin 2\omega t + \frac{gt}{2\omega}, \quad (7)$$

$$x_2(t) = q_2 + \frac{\dot{q}_1}{2\omega} + \frac{\dot{q}_2}{2\omega} \sin 2\omega t + \frac{-2\omega \dot{q}_1 + g}{4\omega^2} \cos 2\omega t - \frac{g}{4\omega^2}. \quad (8)$$

Distanța orizontală de zbor (bătaia) se va obține din formula (7) cu condiția $x_2 = 0$, condiție din care se află timpul t_1 necesar parcurgerii părții pasive. Din ecuația $x_2(t_1) = 0$ se găsește

$$\sin 2\omega t_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta} = Z, \quad (9)$$

unde, după cum rezultă din calcule,

$$\alpha = \frac{-2\omega \dot{q}_2 (4\omega^2 q_2 + 2\omega \dot{q}_1 - g)}{4\omega^2 \dot{q}_2^2 + (-2\omega \dot{q}_1 + g)^2}, \quad (9')$$

$$\beta = \frac{(4\omega^2 q_2 + 2\omega \dot{q}_1 - g)^2 - (-2\omega \dot{q}_1 + g)^2}{4\omega^2 \dot{q}_2^2 + (-2\omega \dot{q}_1 + g)^2}. \quad (9'')$$

Se înlocuiește (9) în (7) și se obține distanța de zbor

$$R(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = q_1 - \frac{\dot{q}_2}{2\omega} + \frac{\dot{q}_2}{2\omega} \sqrt{1 - Z^2} + \frac{2\omega \dot{q}_1 - g}{4\omega^2} Z + \frac{g}{4\omega^2} \arcsin Z. \quad (10)$$

Distanța de zbor R depinde de poziția rachetei în momentul încetării motorului și de viteza pe care racheta și-a cîștigat-o în această poziție. Poziția finală a părții active este poziție inițială pentru partea pasivă.

Poziția $A(q_1, q_2)$ se obține dacă se integrează ecuațiile mișcării pe partea activă, adică ecuațiile (3) — (4). Aceste ecuații conțin două categorii de funcții necunoscute. Pe de o parte, funcții necunoscute sînt $x_1(t)$ și $x_2(t)$ iar pe de altă $f(t)$ și $l_i(t)$. Dacă se iau ca necunoscute funcțiile $x_i(t)$, adică mișcarea, atunci funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$, care reprezintă regimul de funcționare și direcția tracțiunii, se consideră cunoscute în sensul să sînt date efectiv sau sînt determinate cu condiții suplimentare. Funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$ sînt deci funcții arbitrare, avînd bineînțeles proprietăți matematice necesare asigurării integrării ecuațiilor. Funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$ pot fi alese într-un fel sau altul după cum și forța de tracțiune, forță artificială, poate fi aleasă într-un fel sau altul.

O dată alese funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$ vor rezulta valori bine determinate, obținute prin integrarea ecuațiilor (3) — (4), pentru q_i și $\dot{q}_i$ și în consecință și pentru distanța R .

Dacă se modifică puțin funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$, cu $\delta f(t)$ și $\delta l_i(t)$, adică se ia o variație a regimului de funcționare și dirijare a tracțiunii, atunci va rezulta o variație a mișcării rachetei și în consecință valorile q_i , $\dot{q}_i$ și R vor suferi și ele variațiile δq_i , $\delta \dot{q}_i$, δR între care există o relație ce rezultă din (10) și care are forma

$$\delta R = \delta q_1 + P_2 \delta q_2 + P_3 \delta \dot{q}_1 + P_4 \delta \dot{q}_2, \quad (11)$$

unde

$$P_2 = \left(\frac{-\dot{q}_2 Z}{2\omega \sqrt{1 - Z^2}} + \frac{2\omega \dot{q}_1 - g}{4\omega^2} + \frac{g}{4\omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 - Z^2}} \right) \frac{\partial Z}{\partial q_2},$$

$$P_3 = \frac{-\dot{q}_2 Z}{2\omega \sqrt{1 - Z^2}} \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_1} + \frac{Z}{2\omega} + \frac{2\omega \dot{q}_1 - g}{4\omega^2} \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_1} + \frac{g}{4\omega^2 \sqrt{1 - Z^2}} \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_1},$$

$$P_4 = -\frac{1}{2\omega} + \frac{\sqrt{1 - Z^2}}{2\omega} - \frac{\dot{q}_2 Z}{2\omega \sqrt{1 - Z^2}} \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_2} + \frac{2\omega \dot{q}_1 - g}{4\omega^2} \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_2} + \frac{g}{4\omega^2 \sqrt{1 - Z^2}} \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_2}.$$

Problema care se pune acum constă în alegerea funcțiilor $f(t)$ și $l_i(t)$ în așa fel ca bătaia R a rachetei să fie maximă.

Nu ne vom ocupa cu rezolvarea în întregime a acestei probleme, ci vom considera că funcția $f(t)$ este dată (fixată din punct de vedere variațional), rămînînd să alegem numai funcțiile $l_i(t)$ care fac maximă bătaia R .

În acest scop va trebui să exprimăm variațiile δq_i și $\delta \dot{q}_i$, și pe urmă și variația δR , în raport cu variațiile δl_i și din condiția de extrem $\delta R = 0$ să deducem expresiile funcțiilor $l_i(t)$, adică regimul optim de dirijare care să asigure realizarea unei bătai maxime.

3. REGIMUL OPTIM DE DIRIJARE A DIRECȚIEI TRACȚIUNII

Considerind că funcția $f(t)$ este dată, ecuațiile variațiilor se vor deduce din ecuațiile (3) — (4) și au forma

$$\delta \ddot{x}_1 + 2\omega \delta \dot{x}_2 = f \delta l_1, \quad (12)$$

$$\delta \ddot{x}_2 - 2\omega \delta \dot{x}_1 = f \delta l_2. \quad (13)$$

Să observăm că problema variațională formulată permite să scriem ecuațiile (12) — (13) în forma

$$\frac{d}{dt}(\delta \dot{x}_1) + 2\omega \frac{d}{dt}(\delta x_2) = f \delta l_1, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt}(\delta \dot{x}_2) - 2\omega \frac{d}{dt}(\delta x_1) = f \delta l_2.$$

Problema noastră cere să aflăm variațiile δx_i și $\delta \dot{x}_i$ care satisfac ecuațiile precedente. Pentru a rezolva aceste ecuații facem substituțiile

$$\delta \dot{x}_i = z_i, \quad \delta x_i = y_i \quad (15)$$

și atunci ecuațiile precedente conduc la sistemul

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 + 2\omega z_2 &= f \delta l_1, \\ \dot{z}_2 - 2\omega z_1 &= f \delta l_2, \\ \dot{y}_1 - z_1 &= 0, \\ \dot{y}_2 - z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Adăugăm la ecuațiile (16) următoarele condiții inițiale

$$\begin{aligned} z_1(0) &= \delta \dot{x}_1(0) = 0, \quad z_2(0) = \delta \dot{x}_2(0) = 0, \\ y_1(0) &= \delta x_1(0) = 0, \quad y_2(0) = \delta x_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Ecuațiile omogene corespunzătoare primelor două ecuații din (16) pot fi scrise în forma

$$\ddot{z}_i + 4\omega^2 z_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Integrala generală a sistemului omogen este de forma

$$\begin{aligned} z_1(t) &= A \cos 2\omega t - B \sin 2\omega t, \\ z_2(t) &= A \sin 2\omega t + B \cos 2\omega t. \end{aligned} \quad (18)$$

Determinantul sistemului fundamental de soluții este

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2\omega t & -\sin 2\omega t \\ \sin 2\omega t & \cos 2\omega t \end{vmatrix} = 1. \quad (19)$$

Se observă din (18) că pentru condițiile inițiale (17) constantele A și B sînt nule.

Pentru a găsi soluțiile sistemului (16) unit cu condițiile (17) vom folosi metoda variației constantelor.

Soluțiile primelor două ecuații din (16) care satisfac condițiile inițiale sînt

$$z_1(t) = \delta \dot{x}_1(t) = \int_0^t f(s) [\cos 2\omega(t-s) \delta l_1(s) - \sin 2\omega(t-s) \delta l_2(s)] ds, \quad (20)$$

$$z_2(t) = \delta \dot{x}_2(t) = \int_0^t f(s) [\sin 2\omega(t-s) \delta l_1(s) + \cos 2\omega(t-s) \delta l_2(s)] ds. \quad (21)$$

Ultimele două ecuații din (16) se integrează cu ajutorul soluțiilor (20) — (21) sub forma

$$y_1(t) = \delta x_1(t) = \int_0^t dx \int_0^x f(s) [\cos 2\omega(x-s) \delta l_1(s) - \sin 2\omega(x-s) \delta l_2(s)] ds, \quad (22)$$

$$y_2(t) = \delta x_2(t) = \int_0^t dx \int_0^x f(s) [\sin 2\omega(x-s) \delta l_1(s) + \cos 2\omega(x-s) \delta l_2(s)] ds. \quad (23)$$

Pentru calculul ultimelor integrale folosim formula lui Dirichlet și obținem

$$y_1(t) = \delta x_1(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{2\omega} \{ [\cos 2\omega(t-s) - 1] \delta l_2(s) + \sin 2\omega(t-s) \delta l_1(s) \} ds, \quad (24)$$

$$y_2(t) = \delta x_2(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{2\omega} \{ \sin 2\omega(t-s) \delta l_2(s) + [1 - \cos 2\omega(t-s)] \delta l_1(s) \} ds. \quad (25)$$

Dacă notăm cu T timpul în care racheta parcurge partea activă OA , atunci formulele (20) — (21) și (24) — (25) aplicate la momentul T , după înlocuirea variabilei s cu t , devin

$$\delta \dot{q}_1 = \delta \dot{x}_1(T) = \int_0^T f(t) [\cos 2\omega(T-t) \delta l_1(t) - \sin 2\omega(T-t) \delta l_2(t)] dt,$$

$$\delta \dot{q}_2 = \delta \dot{x}_2(T) = \int_0^T f(t) [\sin 2\omega(T-t) \delta l_1(t) + \cos 2\omega(T-t) \delta l_2(t)] dt, \quad (26)$$

$$\delta q_1 = \delta x_1(T) = \int_0^T \frac{f(t)}{2\omega} \{ \sin 2\omega(T-t) \delta l_1(t) + [\cos 2\omega(T-t) - 1] \delta l_2(t) \} dt,$$

$$\delta q_2 = \delta x_2(T) = \int_0^T \frac{f(t)}{2\omega} \{ [1 - \cos 2\omega(T-t)] \delta l_1(t) + \sin 2\omega(T-t) \delta l_2(t) \} dt.$$

Înlocuim expresiile variațiilor (26) în formula (11) și expresia variației bătăii R devine

$$\delta R = \int_0^T f(t) \left\{ \left[\left(\frac{1}{2\omega} + P_4 \right) \sin 2\omega (T-t) + \left(P_3 - \frac{P_2}{2\omega} \right) \cos 2\omega (T-t) + \frac{P_2}{2\omega} \right] \delta l_1(t) + \left[-\frac{1}{2\omega} + \frac{1}{2\omega} \cos 2\omega (T-t) + \left(\frac{P_2}{2\omega} - P_3 \right) \sin 2\omega (T-t) + P_4 \cos 2\omega (T-t) \right] \delta l_2(t) \right\} dt. \quad (27)$$

Variațiile δl_1 și δl_2 satisfac relația

$$l_1 \delta l_1 + l_2 \delta l_2 = 0 \quad (28)$$

deoarece

$$l_1^2 + l_2^2 = 1. \quad (29)$$

Condiția necesară de extrem $\delta R = 0$ împreună cu relația (28) conduce la formula

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\left(\frac{1}{2\omega} + P_4 \right) \sin 2\omega (T-t) + \left(P_3 - \frac{P_2}{2\omega} \right) \cos 2\omega (T-t) + \frac{P_2}{2\omega}}{\left(P_4 + \frac{1}{2\omega} \right) \cos 2\omega (T-t) + \left(\frac{P_2}{2\omega} - P_3 \right) \sin 2\omega (T-t) - \frac{1}{2\omega}} \quad (30)$$

La formula (30) se adaugă relația

$$l_2 = \sqrt{1 - l_1^2} \quad (31)$$

și rezolvînd sistemul de ecuații (30) — (31) în raport cu l_1 și l_2 obținem

$$l_1 = \cos \varphi = \frac{L_1(t)}{\sqrt{L_1^2(t) + L_2^2(t)}}, \quad (32)$$

$$l_2 = \sin \varphi = \frac{L_2(t)}{\sqrt{L_1^2(t) + L_2^2(t)}},$$

adică

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l_2(t)}{l_1(t)} = \frac{L_2(t)}{L_1(t)}, \quad (32')$$

unde

$$L_1(t) = \left(\frac{1}{2\omega} + P_4 \right) \sin 2\omega (T-t) + \left(P_3 - \frac{P_2}{2\omega} \right) \cos 2\omega (T-t) + \frac{P_2}{2\omega}, \quad (33)$$

$$L_2(t) = \left(\frac{P_2}{2\omega} - P_3 \right) \sin 2\omega (T-t) + \left(P_4 + \frac{1}{2\omega} \right) \cos 2\omega (T-t) - \frac{1}{2\omega}.$$

Formula (32') reprezintă programarea optimă a direcției tracțiunii pentru a obține o bătaie maximă a rachetei. După cum se vede, programarea optimă depinde de timpul t , adică este variabilă în timp, de timpul T , adică de perioada funcționării motorului, de poziția (q_1, q_2) și vitezele $\dot{q}_1$ și $\dot{q}_2$ pe care racheta le are în momentul încetării funcționării motorului. Intervalul de timp T este dat, însă valorile q_i și $\dot{q}_i$ nu sînt cunoscute. Pentru a determina valorile q_i și $\dot{q}_i$ va trebui să integrăm ecuațiile mișcării pe partea activă, adică ecuațiile (3) — (4), în care acum l_1 și l_2 se consideră cunoscuți cu ajutorul formulelor de dirijare optimă (32).

Integrînd, prin metodele folosite mai sus, ecuațiile (3) — (4) împreună cu formulele (32) și condițiile inițiale

$$x_i(0) = 0, \quad \dot{x}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

se găsesc ecuațiile traiectoriei optimale.

Aplicînd ecuațiile astfel obținute la momentul $t = T$ se găsesc pentru valorile q_i și $\dot{q}_i$ ecuațiile

$$q_1 = \int_0^T f(t) \cos [\varphi(t) - 2\omega(t - T)] dt + \frac{g}{2\omega} (1 - \cos 2\omega T),$$

$$\dot{q}_2 = \int_0^T f(t) \sin [\varphi(t) - 2\omega(t - T)] dt - \frac{g}{2\omega} \sin 2\omega T, \quad (34)$$

$$q_2 = \frac{1}{2\omega} \int_0^T f(t) \left\{ \sin [\varphi(t) - 2\omega(t - T)] - \sin \varphi(t) \right\} dt + \frac{gT}{2\omega} + \frac{g}{4\omega^2} \sin 2\omega T,$$

$$q_2 = \frac{1}{2\omega} \int_0^T f(t) \left\{ \cos \varphi(t) - \cos [\varphi(t) - 2\omega(t - T)] \right\} dt - \frac{g}{4\omega^2} (\cos 2\omega T - 1).$$

Soluțiile $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$ ale sistemului (34) se înlocuiesc acum în formulele (33) — (32) — (32') și în formula (10).

Se determină, în acest fel, nu numai regimul optim de dirijare a direcției tracțiunii pentru obținerea unei bătaii maxime, ci și valoarea maximă a acestei bătaii, care corespunde regimului dat de funcționare a motorului $f(t)$, vitezei unghiulare ω , cîmpului gravitațional plan-parallel și intervalului de timp dat T de funcționare a motorului.

Observație. Ecuațiile (3) — (4) împreună cu formulele (32) reprezintă ecuațiile diferențiale ale traiectoriei optimale. La aceste ecuații se vor adăuga formulele (34) pentru determinarea valorilor q_i și $\dot{q}_i$.

B. RACHETE COSMICE

4. CALCULUL ENERGIEI MAXIME

Să presupunem că racheta se mișcă în câmpul gravitațional plan-paralel constant sub acțiunea forței de tracțiune și a forței Coriolis în condițiile din problema precedentă. Să notăm cu OA partea activă a tracțiunii, pe care are loc accelerarea rachetei. În poziția A forța de tracțiune încetează să acționeze și racheta se mișcă ca un corp cu masă constantă. Să notăm cu (q_1, q_2) și $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ coordonatele, respectiv vitezele rachetei în poziția A . Ecuațiile mișcării rachetei pe partea activă vor fi (3) — (4) iar pe partea pasivă (5) — (6).

Energia totală (cINETICĂ și potențială), raportată la unitatea de masă, câștigată de rachetă în punctul A , adică la sfârșitul intervalului de accelerare, va fi

$$E = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + gq_2. \quad (35)$$

Problema care se pune constă în alegerea funcțiilor $l_i(t)$, adică a regimului de dirijare a direcției tracțiunii pe partea activă a traiectoriei, în așa fel ca valoarea E să fie maximă.

Condiția de extrem, obținută prin anularea primei variații, este

$$\delta E = \dot{q}_1 \delta \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \delta \dot{q}_2 + g \delta q_2 = 0. \quad (36)$$

Pentru a exprima relațiile dintre variațiile $\delta \dot{q}_1$, $\delta \dot{q}_2$, δq_2 și variațiile δl_i ale direcției tracțiunii folosim formulele (26), considerînd că $\delta x_i(0) = 0$, $\delta \dot{x}_i(0) = 0$.

Notînd

$$L_1(t) = \dot{q}_2 \sin 2\omega(T-t) + \left(\dot{q}_1 - \frac{g}{2\omega} \right) \cos 2\omega(T-t) + \frac{g}{2\omega}, \quad (37)$$

$$L_2(t) = \left(\frac{g}{2\omega} - \dot{q}_1 \right) \sin 2\omega(T-t) + \dot{q}_2 \cos 2\omega(T-t),$$

condiția de extrem (36) devine

$$\delta E = \int_0^T f(t) [L_1(t) \delta l_1(t) + L_2(t) \delta l_2(t)] dt = 0, \quad (38)$$

la care se adaugă relația cunoscută

$$l_1 \delta l_1 + l_2 \delta l_2 = 0. \quad (39)$$

Din comparația expresiilor (38) și (39) rezultă

$$\cos \varphi = l_1(t) = \frac{L_1(t)}{\sqrt{L_1^2(t) + L_2^2(t)}}, \quad (40)$$

$$\sin \varphi = l_2(t) = \frac{L_2(t)}{\sqrt{L_1^2(t) + L_2^2(t)}},$$

adică

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L_2(t)}{L_1(t)} \quad (41)$$

pentru regimul optim de dirijare a direcției tracțiunii, unde $L_1(t)$ și $L_2(t)$ au expresiile (37).

Ecuațiile diferențiale ale traiectoriei optimele sînt

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\omega \dot{x}_2 &= \frac{f(t) L_1(t)}{\sqrt{L_1^2(t) + L_2^2(t)}}, \\ \ddot{x}_2 - 2\omega \dot{x}_1 &= \frac{f(t) L_2(t)}{\sqrt{L_1^2(t) + L_2^2(t)}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Integrarea acestor ecuații conduce la formule de tipul (34), cu care se găsesc valorile necunoscute $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ și q_2 . Se înlocuiesc valorile $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, q_2 , astfel determinate, în formulele (41), (35) și (42) și se obține dirijarea optimă a direcției tracțiunii, valoarea maximă a energiei E precum și ecuațiile traiectoriei optimele.

5. OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

Scopul principal al lucrării de față constă în determinarea programii optime a direcției tracțiunii unor tipuri de rachete ținînd seama că Pămîntul se rotește în jurul axei sale.

rotația Pămîntului influențează simțitor calculul distanței orizontale de zbor a rachetelor balistice și are un important efect asupra dirijării optime a tracțiunii unor asemenea rachete.

Comparativ cu ipoteza Pămîntului fix, care conduce, după cum este dovedit în lucrarea lui D. Lawden, la rezultate destul de simple, lucrarea de față arată că problema se complică mult în cazul Pămîntului mobil și că deși ea este rezolvabilă prin cvadraturi acestea nu se pot evalua decît folosind metode numerice.

Rezolvarea problemei obținerii unei energii maxime este utilă în problemele satelitului artificial și în problema desprinderii rachetelor de pe o orbită circulară aflată în jurul unui centru atractiv, în particular în jurul Pămîntului. În acest caz viteza inițială este, desigur, diferită de zero.

În lucrarea noastră se presupune că contribuția forțelor aerodinamice (rezistența aerului) este neglijabilă iar câmpul gravitațional este plan-pa-

ralel și constant. Aceste ipoteze sînt valabile numai aproximativ dar luarea lor în considerare, într-o formă mai generală nu modifică în esență problema ci introduce complicații mai mari în calcule.

Rezultatele obținute permit, în primul rînd, să ne facem o suficientă idee despre felul cum trebuie dirijată, ținînd seama că Pămîntul este mobil, tracțiunea unor rachete în vederea realizării unei bătaî maxime și energii maxime și, în al doilea rînd, să calculăm efectiv valoarea acestei bătaî și energii.

Primită la redacție la 19 septembrie 1962 și o nouă versiune la 25 ianuarie 1963

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЯГОЙ НЕКОТОРЫХ РАКЕТ

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется задача управления, по оптимальной программе, направлением баллистической ракеты и космической ракеты ввиду получения дальности, соответственно максимальной энергии, в гипотезе, что Земля движется в пространстве, а режим работы двигателя задан.

Указывается затем, при тех же гипотезах, как можно рассчитывать максимальную дальность баллистической ракеты и также как можно оценить максимальную энергию космической ракеты.

БИБЛИОГРАФИЕ

1. D. LAWREN, *Issledovanie optimalnih regimov dvijenja raket*. Oboronghizd, Moscva, 1959.
2. D. E. OHOTIMSKI, T. M. ENEEV, *Unele probleme variaționale legate de lansarea sateliților artificiali ai Pămîntului*. UFN sept., 1957.