MATHEMATICA VOL. 6 (29), 2, 1964, pp. 295–299

SUR L'INTERPOLATION À L'AIDE DE POLYNOMES RACCORDÉS

par

ION PĂVĂLOIU

à Cluj

1. Soit $f(x) \in C^{n-1}$ une fonction bornée, définie dans l'intervalle $[a, b]$ et soit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ une division de l'intervalle $[a, b]$.

Supposons qu'on connaît les valeurs de la fonction $f(x)$ dans les $m + 1$ noeuds de divisions de l'intervalle $[a, b]$ ainsi que les valeurs des dérivées successives de la fonction $f(x)$ dans le noeud initial x_0.

Nous posons:

$$
(1)\qquad \begin{aligned} f(x_i) &= u_i, \quad i = 1, 0, \ldots, m \\ f^{(k)}(x_0) &= p_0^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}
$$

Soit $\mathcal{P}_n$ la classe de toutes les fonctions définies dans l'intervalle $[x_0, x_m]$ et qui dans chaqun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \ldots, m$ sont identiquement égales à un polynome $P_{n_i}(x)$ de degré n.

D é f i n i t i o n. *On apelle polynome raccordé de l'ordre $n - 1$, chaque fonction $\varphi(x)$ qui appartient à la classe $\mathcal{P}_n$ et pour laquelle nous avons*

$$
(2)\qquad P_{n_i}^{(k)}(x_i) = P_{n_{i+1}}^{(k)}(x_i), \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, m-1 \\ k &= 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}
$$

Soit les valeurs données (1) — on demande de déterminer le polynome $P(x)$ raccordé de l'ordre $n - 1$ qui satisfait aux conditions :

$$
(3)\qquad \begin{aligned} P(x_i) &= u_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m \\ P^{(k)}(x_0) &= p_0^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}
$$

L e m m e 1. *Si l'on donne les valeurs*

$$
(4)\qquad \begin{aligned} & f^{(k)}(a) = \beta_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ & f(c) = \gamma_0, \quad c \neq a \end{aligned}
$$

où c est un point de l'intervalle $[a, b]$ *alors il existe un seul polynome de degré n,* $Q_n(x)$ *de la forme* $Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (x-a)^j$ *qui satisfait aux conditions* (4) *dans les points a et c.*

Démonstration : Écrivant que le polynome $Q_n(x)$ satisfait aux conditions (4) nous obtenons pour la détermination de α_j, $j = \overline{0, n}$ le système d'équation linéaires algébriques suivant :

$$
(5)\qquad \begin{aligned} & l!\alpha_l = \beta_l, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1 \\ & \alpha_0 + \alpha_1(c-a) + \ldots + \alpha_n(c-a)^n = \gamma_0 \end{aligned}
$$

Le déterminant du système a la forme :

$$
(6)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1! & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & (n-1)! & 0 \\ 1 & c-a & \ldots & (c-a)^{n-1} & (c-a)^n \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} i!(c-a)^n
$$

Étant donné que nous avons supposé que $c \neq a$, il résulte que $\Delta \neq 0$ et en conséquence, la systéme (5) a une solution unique.

En résolvant le système (5) nous obtenons pour $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ les valeurs suivantes :

$$
(7)\qquad \begin{aligned} & \alpha_l = \frac{\beta_l}{l!}, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1 \\ & \alpha_n = \frac{\gamma_0 - \beta_0}{(c-a)^n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k}{k!(c-a)^{n-k}} \end{aligned}
$$

L e m m e 2. *Soit* (x_0, x_1, x_2) *un système donné de trois noeuds consécutifs, tel que l'on ait,*

$$
\Delta x_0 = x_1 - x_0 \neq 0, \ \Delta x_1 = x_2 - x_1 \neq 0.
$$

Si $P(x)$ et $R(x)$ sont deux polynomes de degré n qui appartiennent à la classe $\mathcal{P}_n$ et qui sur les noeuds x_0, x_1, x_2 satisfont aux conditions

$$
(8)\qquad \begin{aligned} & R^{(k)}(x_0) = p_0^k, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad R(x_0) = u_0, \quad R(x_1) = u_1, \\ & P^{(k)}(x_1) = p_1^k, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad P(x_1) = u_1, \quad P(x_2) = u_2 \end{aligned}
$$

alors la conditions nécessaire et suffisante pour que dans le point x_1 nous ayons

$$
(9)\qquad P^{(k)}(x_1) = R^{(k)}(x_1), \quad k = \overline{1, n-1}
$$

est qu'entre p_1^k, p_0^k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, u_0, u_1, l'on ait les relations :

$$
(10)\qquad p_1^k = \sum_{i=0}^{n-k-1} p_0^{k+i} \frac{\Delta x_0^i}{i!} + A \prod_{i=n-k+1}^{n} i\,\Delta x_0^{n-k}
$$

où

$$
(11)\qquad A = \frac{u_1 - u_0}{\Delta x_n^0} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_0^i}{i!\Delta x_0^{n-i}}
$$

Démonstration.

N é c e s s i t é : Les polynomes $P(x)$ et $R(x)$ déterminés sans ambiguité par les conditions (8) ont la forme :

$$
(12)\qquad \begin{aligned} & R(x) = u_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_0^i (x-x_0)^i}{i!} + \left[\frac{u_1 - u_0}{\Delta x_0^n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_0^i}{i!\Delta x_0^{n-i}}\right](x-x_0)^n \\ & P(x) = u_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_1^i (x-x_1)^i}{i!} + \left[\frac{u_2 - u_1}{\Delta x_1^n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_1^i}{i!\Delta x_1^{n-i}}\right](x-x_1)^n \end{aligned}
$$

Si nous écrivons maintenant que ces polynomes satisfont aux conditions (9) nous obtenons successivement les relations (10).

S u f f i s a n c e. Si entre p_0^k, p_1^k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, u_0, u_1, il existe les relations (10), alors on vérifie directement par calcul que les polynomes (12) satisfont aux relations (9).

C o n s é q u e n c e. Si les valeurs (1) sont données, alors, il existe un système unique de valeurs

$$
p_i^j, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{1, n-1}
$$

qui avec les valeurs (1) déterminent sans ambiguité un polynome raccordé de l'ordre $n-1$, qui satisfait aux conditions (3).

Les valeurs p_i^j, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$ sont données par les formules de récurrence suivantes :

$$p_{i+1}^j = \sum_{k=0}^{n-j-1} p_i^{j+k} \frac{\Delta x_i^k}{k!} + A_i \prod_{k=n-j+1}^{n} k \,.\, \Delta x_i^{n-j}, \tag{13}$$

$$j = 1, 2, \ldots n-1, \; i = 0, 1, \ldots, m-2$$

où

$$A_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_i^n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p_i^k}{k!\,\Delta x^{n-k}}, \; i = \overline{0, m-2}$$

et

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \; i = \overline{0, m-2}$$

Des lemnes 1 et 2 il résulte la théorème suivant:

THÉORÈME 1. Si les valeurs (1) *sont données, alors à la fonction* $f(x)$ *correspond un seul polynome raccordé d'ordre* $n-1$ *qui prend ces valeurs sur les noeuds* x_i, $i = \overline{0, m}$.

Désignons par $S_n(U, P)$ l'espace linéaire des tous les polynomes raccordés d'ordre $n-1$ de l'intervalle $[x_0, x_m]$. Nous avons la conséquence suivante :

Conséquence. L'espace $S_n(U, P)$ est un espace linéaire de dimension $m + n$.

Démonstration. Le théorème 1 fait correspondre à chaque vecteur

$$(u_0, \ldots, u_m, p_0^1, \ldots, p_0^{n-1})$$

un polynome raccordé déterminé sans ambiquité $u(x) \in S_n(U, P)$.

Inversement les égalités (1) font qu'à chaque polynome $U(x) \in S_n(U, P)$ correspond un vecteur unique

$$(U_0, \ldots, U_m, p_0^1, \ldots, p_0^{n-1})$$

Le lemme 2 et sa conséquence fournissent un procédé pratique de calcul de la valeur approximative de la fonction $f(x)$ en chaque point,

$$\bar{x} \in [a, b], \quad \bar{x} \neq x_i, \quad i = \overline{0, m}$$

si on donne les valeurs (1).

Si $u(x)$ est le polynome raccordé d'ordre $n-1$ qui satisfait aux conditions (3) alors nous entendons par sa valeur approximative de la fonction $f(x)$ dans le point $\bar{x}$ la valeur du polynome $u(x)$ dans le point $\bar{x}$ et écrirons $f(\bar{x}) \simeq u(\bar{x})$.

Pour la détermination du polynome $U(\bar{x})$ nous procédons ainsi qu'il suit : Soit $x_k < \bar{x} < x_{k+1}$. Utilisant maintenant les formules de récurrence (13) nous calculons successivement les valeurs :

$$p_1^j, p_2^j, \ldots, p_{k-1}^j, p_k^j, \; j = \overline{1, n-1}$$

Le polynome $U(x)$ pour $x_k < x < x_{k+1}$ prend alors la forme suivante :

$$U(x) = u_k + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_k^i}{i!} (x - x_k)^i + A_k (x - x_k)^n \tag{14}$$

où

$$A_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x_k^n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_k^i}{i!\,\Delta x_k^{n-i}}$$

et

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

Le calcul des coefficients du polynome $U(x)$ pour

$$x_k < x < x_{k+1} \; k = \overline{1, m}$$

ainsi qu'on le voit, est facilement algorithmisable, donc les résultats peuvent s'obtenir simplement à l'aide d'une machine électronique chiffrique de calcul.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Boor Carl (de), *Bicubic spline interpolation*. Journal of Mathematics and Physics. **41**, 3 (1962).
[2] Березин И. С., Жидков Н. П, *Методы вычислении*. Государственное издательство Физико-мaтемaтематической Литературы, Москва, 1959.

Reçu le 19. XI. 1963