MATHEMATICA Vol. 12(35), 1970, No. 2, pp. 309–324

SUR LES PROCÉDÉS ITÉRATIFS À UN ORDRE ÉLEVÉ DE CONVERGENCE

par
I. PĂVĂLOIU
à Cluj

Soit X un espace de Banach et

$$P(x)=\theta \tag{1}$$

une équation opérationnelle où l'opérateur P est défini sur l'espace X et avec des valeurs dans l'espace linéaire normé Y.

Pour la résolution de l'équation (1) on consière en général un autre opérateur Q défini sur l'espace X et avec des valeurs dans le même espace.

DÉFINITION 1. *On dit que l'opérateur Q est un opérateur itératif attaché à l'équation* (1) *si tout élément $\bar{x}\in X$ pour lequel $P(\bar{x})=\theta$, est un point fixe pour l'opérateur Q.*

A l'aide de l'opérateur itératif Q on attachera à l'équation (1) le procédé itératif suivant.

$$x_{n+1}=Q(x_n),\ n=0,1,\ldots,\ x_0\in X \tag{2}$$

DÉFINITION 2. *Si $x_0\in X$, l'opérateur itératif Q et le nombre réel et positif ρ satisfont aux conditions:*

a) $\|P(x_{n+1})\|\leq\rho\|P(x_n)\|^k$, *pour* $n=0,1,\ldots,$ *où* $k\geq 2$ *est un nombre naturel.*

b) $\rho^{\frac{1}{k-1}}\|P(x_0)\|<1$.

Alors on dira que le procédé itératif (2) possède l'ordre de convergence k.

En ce qui concerne la notion d'ordre de convergence introduite précédemment, a lieu le lemme suivant.

Lemme 1. *Si le procédé itératif* (2) *possède l'ordre de convergence* k *alors* $\lim_{n\to\infty} \|P(x_n)\| = 0$, *de plus, si la suite* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *est convergente et l'opérateur* P *est continu, alors* $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ *est une solution de l'équation* (1).

Démonstration. Puisque le procédé (2) possède l'ordre de convergence k il en résulte qu'il existe un élément $x_0 \in X$ pour lequel

$$\varepsilon_0 = \rho^{\frac{1}{k-1}} \|P(x_0)\| < 1 \tag{3}$$

où ρ est une constante réelle et positive pour laquelle est remplie aussi la condition a) de la définition 2.

En employant la condition a) de la définition 2, pour $n = 0, 1, \ldots,$ on obtient

$$\rho^{\frac{1}{k-1}} \|P(x_{n+1})\| \leq \left[\rho^{\frac{1}{k-1}} \|P(x_n)\|\right]^k$$

d'où, en écreivant $\varepsilon_n = \rho^{\frac{1}{k-1}} \|P(x_n)\|$ l'on déduit

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^k.$$

Si on applique cette inégalité successivement pour $n = 0, 1, \ldots,$ on obtient

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_0^{k^n}$$

ou, si on tient compte de (3) on a

$$\lim_{n\to 0} \varepsilon_n = 0.$$

Puisque $\rho > 0$ il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \|P(x_n)\| = 0.$$

Si $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ et l'opérateur P est continu, il en résulte qu'on a l'égalité:

$$\lim_{n\to\infty} \|P(x_n)\| = \|P(\bar{x})\| = 0.$$

C'est-à-dire

$$P(\bar{x}) = \theta$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Dans la définition 2 où on a précisé la notion d'ordre de convergence d'un opérateur itératif on n'a pas inclus la condition que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par le procédé (2) soit convergente.

En ce sens, on est parti de l'idée qu'en pratique on est assez rarement conduit par certains procédés à la solution exacte des équations de forme (1). D'habitude, pour les besoins de la pratique, on peut se borner à une seule solution approchée. Un des critères simples d'appréciation du fait que x est une solution approchée pour l'équation (1) consiste à vérifier dans quelle mesure le nombre réel et positif $\|P(x)\|$ est proche de zéro. Évidemment, plus il sera proche de zéro, plus on considérera que la solution approchée trouvée peut satisfaire plus exactement aux requêtes du problème pratique.

Dans ce qui suit, dans tous les problèmes de convergence qu'on étudiera, concernant l'équation (1) et le procédé (2) on examinera tant la manière dont la suite $(\|P(x_n)\|)_0^{\infty}$ converge vers zéro que la manière dont la solution approchée, approche la solution exacte.

On présentera mainenant un critère géneral de convergence pour la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par le procédé (2). Ce résultat pourra être considéré aussi comme un critère d'existence de la solution pour l'équation (1). Pour cela on supposera que l'oṕrateur itératif Q a la forme:

$$Q(x) = x + \varphi(x) \tag{3'}$$

THÉORÈME 2. [6]. *Soit* $x_0 \in X$ *et* $S = \{x \in X;\ \|x - x_0\| \leq \delta\}$. *Si l'élément* x_0 *et le nombre réel* δ *peuvent être choisis de telle sorte que dans la sphère* S *soient remplies les conditions suivantes:*

a) l'opérateur P *admet des dérivées (dans le sens de Fréchet) jusqu'à l'ordre* k *inclusivement et* $\left\|P^{(k)}(x)\right\| \leq M < +\infty$ *pour tout* $x \in S$.

b) Il existe une constante réelle et non-négative α, *pour laquelle a lieu l'inégalité*

$$\left\|P(x) + P'(x)\varphi(x) + \frac{P''(x)}{2!}\varphi^2(x) + \cdots + \frac{P^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}\varphi^{k-1}(x)\right\| \leq \alpha \|P(x)\|^k,$$

pour tout $x \in S$.

c) Il existe une constante réelle et positive β *pour laquelle a lieu l'inégalité*

$$\|\varphi(x)\| \leq \beta \|P(x)\|, \ \text{pour tout } x \in S.$$

d) $\rho_0 = v\|P(x_0)\| < 1$ *où* $v = \left(\alpha + \frac{M\beta^k}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}}$.

e) $\frac{\beta\rho_0}{v(1-\rho_0)} \leq \delta$.

Alors on a pour l'équation (1) *et le procédé* (2) *les propriétés suivantes:*

a') L'équation (1) *a au moins une solution* $\bar{x} \in S$.
b') La suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *est convergente et* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.
c') $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\beta \rho_0^{k^n}}{v}$.
d') $||\bar{x} - x_n|| \leq \frac{\beta \rho_0^{k^n}}{v\left(1-\rho_0^{k^n}\right)}$.
e') $\|P(x_{n+1})\| \leq \frac{\rho_0^{k^{n+1}}}{v}$.
f') Le procédé itératif (2) *possède l'ordre de convergence* k, *où la suite* $(x_n)_0^{\infty}$ *est fournie par* (2) *où* $Q(x)$ *a la forme* $(3')$.

Démonstration. De la condition c) il résulte l'inégalité suivante

$$\|\varphi(x_0)\| \leq \beta \|P(x_0)\| \leq \frac{\beta v \|P(x_0)\|}{v} \leq \frac{\beta \rho_0}{v} \leq \frac{\beta\rho_0}{v(1-\rho_0)} \leq \delta \tag{4}$$

d'où on déduit l'inegalité suivante:

$$\|x_1 - x_0\| = \|\varphi(x_0)\| \leq \delta$$

c'est-à-dire $x_1 \in S$. En utilisant les hypothèses a), b) et c) et la formule de Taylor généralisée on en déduit

$$\begin{aligned}\|P(x_1)\| \leq & \left\| P(x_1) - \left(P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}\varphi(x_0) + \cdots + \frac{P^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}\varphi^{k-1}(x_0)\right)\right\| \\ & + \left\| P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}\varphi(x_0) + \cdots + \frac{P^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}\varphi^{k-1}(x_0)\right\| \\ & \leq \frac{M}{k!}\|x_1 - x_0\|^k + \alpha \|P(x_0)\|^k \leq \left(\alpha + \frac{\beta^k M}{k!}\right)\|P(x_0)\|^k\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'a lieu l'inégalité

$$\|P(x_1)\| \leq \left(\alpha + \frac{\beta^k M}{k!}\right)\|P(x_0)\|^k.$$

Puisque $\|x_1 - x_0\| \leq \frac{\beta\rho_0}{v}$ il résulte que pour $n = 0$ a lieu l'inégalité c').

On suppose maintenant que $x_i \in S$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$ et on suppose encore que pour les mêmes valeurs de i ont lieu les inégalités

$\|x_i - x_{i-1}\| \leq \frac{\beta}{v}\rho_0^{k^{i-1}}$. Dans ces hypothèses on montrera que $x_{n+1} \in S$ et que l'inégalité c') a lieu aussi pour $i = n+1$.

Si on procède de la même manière que précédemment, en partant des hypothèses faites on obtiendra les inégalités suivantes.

$$\|P(x_i)\| \leq \left(\alpha + \tfrac{M\beta^k}{k!}\right)\|P(x_{i-1})\|^k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

En multipliant ces inégalités par v on déduit

$$v\|P(x)\| \leq [v\|P(x_{i-1})\|]^k, \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n$$

et en écrivant $\rho_i = v\|P(x_i)\|$ on aura

$$\rho_i \leq \rho_{i-1}^k, \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n \tag{5$'$}$$

ce qui, par application succesive, donne

$$\rho_i \leq \rho_0^{k^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Des inégalités (6) et de l'hypothèses c) on déduit

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\varphi(x_n)\| \leq \tfrac{\beta\rho_n}{v} \leq \tfrac{\beta\rho_0^{k^n}}{v}$$

d'où résulte la valabilité de la conclusion c'). De (6) résulte aussi la conclusion e').

On démontrera à présent que $x_{n+1} \in S$. En effet on a

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \tfrac{\beta}{v}\left(\rho_0^{k^n} + \rho_0^{k^{n+1}} + \cdots + \rho_0^k + \rho_0\right) \leq \tfrac{\beta\rho_0}{v(1-\rho_0)} \leq \delta$$

d'où il résulte que $x_{n+1} \in S$. Pour démontrer la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ on montrera que cette suite est fondamentale. En effet pour $p = 1, 2, \ldots,$ on a

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \tfrac{\beta}{v}\left(\rho_0^{k^n} + \rho_0^{k^{n+1}} + \ldots + \rho_0^{k^{n+p-1}}\right) \leq \tfrac{\beta\rho_0^{k^n}}{v\left(1-\rho_0^{k^n}\right)} \tag{7}$$

d'où tenant compte de l'hypothèse d) il résulte que la suite est convergente puisque X est un espace complet.

Soit $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$, alors en passant à la limite dans l'inégalité (7) pour $p \to \infty$ on a

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\beta\rho_0^{k^n}}{v\left(1-\rho_0^{k^n}\right)}$$

c'est-à-dire l'inégalité d'). Des inégalités ($5'$) et de l'hypothèse d) résulte la propriété f').

Du fait que P est dérivable en S il résulte qu'il est un opérateur continu et donc en passant à la limite dans les inégalités (6) on déduit facilement que $\|P(\bar{x})\| = 0$, c'est-à-dire $P(\bar{x}) = \theta$, c'est-à-dire la propriété a'). □

Remarque. Dans la démonstration du théorème 2 on n'a pas employé le fait que les conditions b) et c) sont remplies sur toute la sphère S. On obtient les mêmes résultats si on suppose que ces conditions sont remplies seulement pour les éléments de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournis par le procédé (2). □

On appliquera maintenant le théoréme 2 pour présenter quelques résultats dans le cas de procédés itératifs particuliers.

1. La méthode de Newton-Kantorovici [1], [2], [4], [10]

Le procédé itératif de Newton-Kantorovici est obtenu en employant l'opérateur itératif:

$$R(x) = x - \left[P'(x)\right]^{-1} P(x).$$

Dans ce cas-là, l'opérateur φ, qui intervient dans le théorème précédent a la forme

$$\varphi(x) = -\left[P'(x)\right]^{-1} P(x).$$

En appliquant la théorème 2 pour $\alpha = 0$, $\beta = B_0$ et $k = 2$ on demontre facilement le théorème suivant:

Théorème 3. [1]*Soit $x_0 \in X$ et $S = \{x \in X; \|x - x_0\| \leq \delta\}$. Si x_0 et δ peuvent être choisis de telle sorte que les conditions suivantes soient satisfaites:*

a) L'opérateur $[P'(x)]^{-1}$ existe et il est borné pour $x \in S$ c'est-à-dire $\left\| [P'(x)]^{-1} \right\| \leq B_0 < +\infty$.

b) L'opérateur $P(x)$ admet une dérivée seconde (dans le sens de Fréchet) et cette dérivée est bornée, c'est-à-dire, $\|P''(x)\| \leq M < +\infty$, pour tout $x \in S$

c) $B_0^2 M \|P(x_0)\| < 2$.

[1]Ce théoréme a été démontré par Misovski. I.P. (Trudî Mat. i Steklova 28, 145-147 (1949).

d) $\frac{2\rho_0}{B_0 M(1-\rho_0)} \leq \delta$ *où* $\rho_0 = \frac{B_0^2 M \|P(x_0)\|}{2}$.

Alors ont lieu les propriétés suivantes pour l'équation (1) *et le procédé de Newton-Kantorovici.*

a') L'équation (1) *a au moins une solution* $\bar{x} \in S'$.

b') La suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *est convergente et* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

c') $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{2\rho_0^{2^n}}{B_0 M}$

d') $\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{2\rho_0^{2^n}}{B_0 M\left(1-\rho_0^{2^n}\right)}$, *ou* $x_n = R\left(x_{n-1}\right)$.

e') Le procédé de Newton-Kantorovici possède l'ordre de convergence 2.

2. La méthode de Tchébycheff [3], [11]

Pour cette méthode on considère le procédé itératif suivant:

Soit

(8)

$$R(x) = x - \left[P'(x)\right]^{-1} P(x) - \frac{1}{2}\left[P'(x)\right]^{-1} P''(x)\left\{\left[P'(x)\right]^{-1} P(x)\right\}^2$$

et la méthode itérative correspondente est

$$x_{n+1} = R(x_n),\ n = 0, 1, \ldots \text{ et } x_0 \in X. \tag{9}$$

Si on écrit

$$\varphi(x) = -\left[P'(x)\right]^{-1} P(x) - \frac{1}{2}\left[P'(x)\right]^{-1} P''(x)\left\{\left[P'(x)\right]^{-1} P(x)\right\}^2$$

alors l'opérateur $R(x)$ a la forme ($3'$).

On vérifie tout de suite l'égalité:

$$\begin{aligned} & P(x) + P'(x)\varphi(x) + \tfrac{1}{2}P''(x)\varphi^2(x) = \\ & = \tfrac{1}{2}P''(x)P'(x)^{-1}P(x)P'(x)^{-1}P''(x)\{P'(x)^{-1}P(x)\}^2 + \\ & \quad + \tfrac{1}{8}P''(x)\left\{P'(x)^{-1}P''(x)\{P'(x)^{-1}P(x)\}^2\right\}^2 \end{aligned} \tag{10}$$

THÉORÈME 4. *Soit* $x_0 \in X$ *et* $S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ *Si l'élément* x_0 *et le nombre réel* δ *peuvent être choisis de telle sorte que les conditions suivantes soient remplies:*

a) l'opérateur $P(x)$ *admet des dérivées (dans le sens de Fréchet) jusqu'à l'ordre trois inclusivement pour tout* $x \in S$ *et*

$$\sup_{x\in S}\left\|P'''(x)\right\| \leq M_3 < +\infty.$$

b) L'opérateur $P'(x)^{-1}$ *existe et il est borné, c'est-à-dire* $\left\|\left[P'(x)\right]^{-1}\right\| \leq B_0 < +\infty$, *pour tout* $x \in S$.

c) Soit

$$M_2 = \left\| P''(x_0) \right\| + M_3\delta,$$
$$M_1 = \left\| P'(x_0) \right\| + M_2\delta,$$
$$M_0 = \| P(x_0) \| + M_1\delta$$

$$\nu = B_0 \left(1 + \tfrac{1}{2} M_2 B_0^2 M_0^2\right) \quad et \quad \mu = \tfrac{1}{2} M_2^2 B_0^4 \left(1 + \tfrac{1}{4} M_2 B_0^2 M_0\right).$$

On suppose qu'on a l'inégalité:

$$\rho_0 = \sqrt{\mu + \tfrac{M_3 \nu^3}{6}}\, \| P(x_0) \| < 1.$$

d)

$$\frac{\nu \rho_0}{\sqrt{\mu + \frac{M_3\nu^3}{6}}\,(1-\rho_0)} \leq \delta.$$

Alors sont valables toutes les conclusions du théorème 2 *pour*

$$k = 3,\ \beta = \nu,\ \alpha = \mu \ et \ v = \sqrt{\mu + \tfrac{\nu^3 M_3}{6}}.$$

Dans ce qui suit, on étudiera la convergence du procédé itératif de Steffensen. Dans le travail [8] on a montré que l'opérateur itératif de Steffensen nous fournit les deux procédés itératifs équivalents suivants:

$$x_n = x_{n-1} - [x_{n-1}, Q(x_{n-1}); P]^{-1} P(x_{n-1}) \tag{11}$$

et

$$x_n = Q(x_{n-1}) - [x_{n-1}, Q(x_{n-1}); P]^{-1} P(Q(x_{n-1})). \tag{12}$$

Relativement à ce procédé, il existe le théorème suivant:

Théorème 5. *Soit $x_0 \in X$ un élément pour lequel sont remplies les conditions ci-dessous:*

a) $\| Q(x_0) - x_0 \| \leq \delta_0 < +\infty$.

b) Les nombres réels et non-négatifs K, B et ρ satisfont à inégalité

$$\varepsilon_0 = \left(K B^2 \rho\right)^{\frac{1}{k-1}} \| P(x_0) \| < 1 \ où \ k \geq 2$$

est un nombre naturel.

c) Soit M un nombre réel et non-négatif.

On écrira $\mu = \max\{\delta_0 + Mr, r\}$ où

$$r = B\left(\| P(x_0) \| + \left(K B^2 \rho\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\varepsilon_0^k}{1 - \varepsilon_0^k} \right)$$

et $S = \{x \in X;\ \|x - x_0\| \leq \mu\}$. On suppose que pour tout $x \in S$ la différence divisée $[x, Q(x); P]$ admet une inverse bornée par le nombre B, c'est-à-dire $\left\| [x, Q(x); P]^{-1} \right\| \leq B < +\infty$.

d) Pour tout $x, y, z \in S$ les différences divisées $[x, y; Q]$, $[x, y; P]$ et $[x, y; z; P]$ sont symétriques par rapport aux noeuds donnés et on a les inéqalités:

$$\|[x, y; Q]\| \leq M,$$
$$\|[x, y, z; P]\| \leq K.$$

e) L'opérateur itératif Q possède l'ordre $k-1$ dans la sphère S c'est-à-dire qu'on a l'inégalité $\|P(Q(x))\| \leq \rho \|P(x)\|^{k-1}$ et l'opérateur P est continu en S.

Si les conditions a)–e) sont remplies alors on a les propriétés suivantes:

a') Les éléments de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par le procédé (11) appartiennent à la sphère S.

b') Les éléments de la suite $(Q(x_n))_{n=0}^{\infty}$ appartiennent à la sphère S.

c') L'équation (1) possède au moins une solution $\bar{x} \in S$.

d') La suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

c') L'ordre de convergence du procédé (11) est k.

Démonstration. Si on écrit $h = KB^2\rho$ et on tient compte du fait qu'on a supposé que la différence divisée $[x, y; P]$ est symétrique par rapport aux noeuds, on a

$$\|P(x_1)\| \leq h \|P(x_0)\|^k .$$

Pour établir l'inégalité précédente on a tenu compte du fait que $x_1 \in S$, ce qui résulte de l'inégalité

$$\|x_1 - x_0\| \leq B \|P(x_0)\| < r \leq \mu.$$

De la même manière on a

$$\|Q(x_1) - x_0\| \leq B \|P(x_0)\| M + \delta_0 < Mr + \delta_0 \leq \mu$$

c'est-à-dire $Q(x_1) \in S$.

On supposera maintenant qu'on a construit à l'aide du procédé (11) les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in S$ et $Q(x_1), \ldots, Q(x_{n-1}) \in S$. On montrera que $x_n \in S$ et $Q(x_n) \in S$. En effet on remarque facilement que pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ on a

$$\|P(x_i)\| \leq h \|P(x_{i-1})\|^k , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{13}$$

En multipliant la dernière inégalité par $h^{\frac{1}{k-1}}$ et en écrivant $\varepsilon_i = h^{\frac{1}{k-1}} \|P(x_i)\|$ on obtient les inégalités:

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_{i-1}^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

d'où il résulte

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_0^{k^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

En tenant compte de ces inégalités et de (13) on déduit:

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq B \|P(x_{n-1})\| \leq Bh^{\frac{1}{1-k}} \varepsilon_0^{n-1}$$

d'où il résulte l'inégalité

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| &\leq B \|P(x_0)\| + Bh^{\frac{1}{1-k}} \left(\varepsilon_0^k + \varepsilon_0^{k^2} + \cdots + \varepsilon_0^{k^{n-1}}\right) \\ &\leq B \left(P(x_0) + h^{\frac{1}{1-k}} \frac{\varepsilon_0^k}{1-\varepsilon_0^k}\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|x_n - x_0\| \leq \mu$$

et par conséquent $x_n \in S$.

Il en résulte immédiatement l'inégalité:

$$\|Q(x_n) - x_0\| \leq \delta_0 + Mr \leq \mu$$

c'est-à-dire $Q(x_n) \in S$.

De ce fait les conclusions a') et b') sont démontrées.

On montrera maintenant que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente. Pour cela on montrera que cette suite est une suite fondamentale. On a

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{Bh^{\frac{1}{1-k}} \varepsilon_0^{k^n}}{1-\varepsilon_0^{k^n}} \tag{14}$$

ce qui nous montre que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite fondamentale et comme l'espace X est supposé complet il en résulte que cette suite est convergente.

Soit:

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

En passant à la limite dans l'inégalité (14) pour $p \to \infty$ on a

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{Bh^{\frac{1}{1-k}} \varepsilon_0^{k^n}}{1-\varepsilon_0^{k^n}}. \tag{15}$$

Cette inégalité nous donne aussi une évaluation de l'erreur après n pas d'itération. Puisque $k \geq 2$ on remarque que l'erreur tend rapidement vers zéro lorsque m croît.

En passant à la limite dans l'inégalité

$$\|P(x_n)\| \leq h^{\frac{1}{1-k}} \varepsilon_0^{k^n}$$

et en tenant compte de la continuité de P on a $\lim \|P(x_n)\| = 0$ on $P(\bar{x}) = \theta$ ce qui démontre la conclusion c'). Évidemment, l'inégalité (15) pour $n = 0$ nous montre que $\bar{x} \in S$.

La conclusion e') résulte du fait que l'inégalité (15) a lieu pour tout n et de l'hypothèse b).

On présentera maintenant une application numérique des résultats exposés dans cette note. □

Application.

On considère l'équation intégrale du type Fredholm

$$P(\varphi(x)) = \varphi(x) - 0.1 \int_0^1 e^x \varphi^2(y)\, dy = 0. \tag{1'}$$

Cette équation admet, en plus de la solution $\varphi(x) = 0$, une autre solution $\varphi(x) = \frac{2e^x}{0.1(e^2-1)}$.

Pour la résolution de l'équation (1′) on appliquera d'abord la méthode de l'itération simple. Soit donc $\varphi_0 = u_0 e^x$ où u_0 est un nombre réel fixé, une solution initiale, et

$$\varphi_n(x) = 0.1 \int_0^1 e^x \varphi_{n-1}^2(y)\, dy. \tag{2'}$$

Du procédé précédent il résulte que $\varphi_n(x)$ a la forme:

$$\varphi_n(x) = u_n e^x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

où

$$u_n = \frac{0.1\left(e^2-1\right)}{2} u_{n-1}^2, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3'}$$

Si le procédé itératif $(3')$ converge, alors à la limite on obtient évidemment une des solutions de l'équation

$$u = \frac{0.1\left(e^2-1\right)}{2}u^2. \tag{4'}$$

L'éguation $(4')$ admet les solutions

$$u = 0 \tag{5'}$$

et

$$u = \frac{2}{0.1(e^2-1)}. \tag{6'}$$

Suivant la terminologie adoptée par A.M. Ostrowski [5], on remarque que $u = 0$ est un point de "contraction" pour l'équation $(4')$ puisque si on choisit $|u_0| < \frac{1}{0.1(e^2-1)}$, alors le procédé itératif $(3')$ converge et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. D'autre part le point $u = \frac{2}{0.1(e^2-1)}$ est un point "répulsif" pour l'équation $(4')$ puisque la fonction

$$f\,(u) = \frac{0.1(e^2-1)}{2}u^2$$

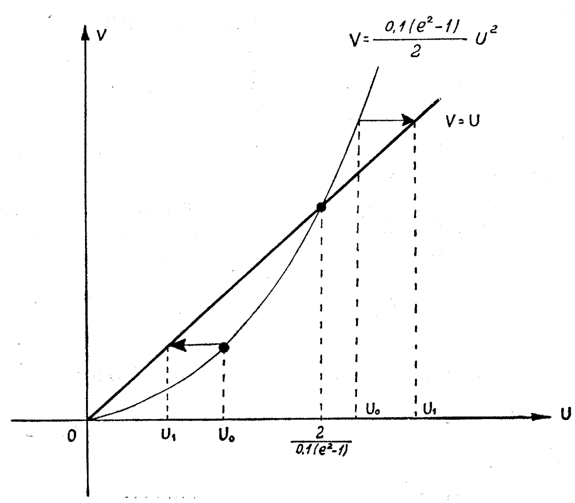

Fig. 1.

satisfait à la condition:

$$f'\,(u)\,|_{k=\frac{2}{0.1(e^2-1)}} = 2 \gg 1$$

En appliquant les résultats du lemme 4.2 [5, p. 36] on peut en déduire la conclusion que le procédé $(3')$ ne convergera jamais vers la solution $(6')$ quelque soit le choix de la valeur initiale.

Graphiquement, ce fait se présente ainsi (Fig. 1).

Si on représente graphiquement dans le système de coordonnées (u, v) les courbes $v = u$ et $v = \frac{0.1(e^2-1)}{2}u^2$ alors les solutions de l'équation $(4')$ ne sont autre chose que les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Sur la figure ci-dessus on remarque qu'en choisissant par example $0 \leq u_0 < \frac{2}{0.1(e^2-1)}$ on aura $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$, c'est-à-dire qu'à l'aide du procédé $(3')$ on obtient $\varphi(x) = 0$. Si $u_0 > \frac{2}{0.1(e^2-1)}$ alors $\lim u_n = \infty$, c'est-à-dire que le procédé $(2')$ est divergent. En prenant pour le nombre e la valeur approchée $e \approx 2,71288183$ et en employant le procédé $(3')$ on obtient les résultats compris dans le tableau 1 [2]

Tableau 1

u	$u_0 = 3$	$u_0 = 4.9$	$u_0 = 3.145$
1	$0.28025655 \cdot 10$	$0.763485296 \cdot 10$	$0.314521122 \cdot 10$
2	$0.249758376 \cdot 10$	$0.185357376 \cdot 10^2$	$0.314563373 \cdot 10$
3	$0.198357507 \cdot 10$	$0.109251715 \cdot 10^3$	$0.31464789 \cdot 10$
4	$0.125113069 \cdot 10$	$0.379546552 \cdot 10^4$	$0.31484816994 \cdot 10$
5	$0.497760154 \cdot 10^0$	$0.458077142 \cdot 10^7$	$0.315155474 \cdot 10$
6	$0.78785949 \cdot 10^{-1}$	$0.667245666 \cdot 10^{13}$	$0.315833527 \cdot 10$
7	$0.1973813 \cdot 10^{-2}$	.	$0.317194011 \cdot 10$
8	$0.1238 \cdot 10^{-5}$	.	$0.319932586 \cdot 10$
9	0	.	$0.325480874 \cdot 10$
10			.
11			.
12			.
13			
14			
15			
16			
17			
18			$0.139250090 \cdot 10^9$
19			$0.616594277 \cdot 10^{16}$
20			$0.120894766 \cdot 10^{32}$
u	0	$+\infty$	$+\infty$

[2]Dans ce tableau on n'a introduit que les valeurs qui suffisent pour en déduire les conclusions nécessaires sur la convergence des suites d'itérations correspondentes.

Évidemment, les résultats des calculs nous montrent que si on prend $u_0 = 3$ alors la suite des approximations successives a comme limite la valeur $u = 0$. Si on prend par exemple $u_0 = 4.9$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Pour mieux illustrer la valabilité des conclusions on a pris pour u_0 la valeur $u_0 = 3.145$ qui diffère très peu de la solution exacte, mais laquelle est plus grande que celle-ci. Dans ce cas-là, en effectuant la suite des itérations successives on remarque que, même si après les premières quatre itérations la troisième chiffre décimal du résultat est conservé, ce qui pourrait nous donner l'illusion d'une possibilité de convergence du procédé, on sera convaincu pourtant, en continuant le procédé, que même dans ce cas on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

On a montré ici, par plusieurs moyens que la solution $\varphi(x) = \frac{2e^x}{0.1(e^2-1)}$ de l'équation $(1')$ ne peut être obtenue que par itération simple. En partant des mêmes approximations initiales on résoudra maintenant l'équation $(1')$ en appliquant la méthode de Steffensen. Pour cela on remarquera que l'équation $(1')$ peut être mise sous la forme

$$\varphi(x) = \psi(\varphi(x))$$

où

$$\psi(\varphi) = 0.1 \int_0^1 e^x \varphi^2(y)\, dy$$

En prenant, comme dans le procédé précédent, une solution initiale de la forme $\varphi_0 = u_0 e^x$ on trouve $\psi(\varphi_0) = \frac{0.1\left(e^2-1\right)}{2} u_0^2 e^x$ et un calcul simple nous montre que la méthode de Steffensen nous donne pour la deuxième approximation $\varphi_1(x)$ l'expression suivante

$$\varphi_1(x) = \left\{ \frac{u_0 - \frac{0.1\left(e^2-1\right)}{2} u_0^2}{\frac{0.1\left(e^2-1\right)}{2}\left[u_0 + \frac{0.1\left(e^2-1\right)}{2} u_0^2\right] - 1} + u_0 \right\} e^x.$$

On en déduit qu'en général, la méthode de Steffensen nous conduit à la suite suivante d'approximations

$$\varphi_n(x) = u_n^* e^x$$

où

$$u_n^* = u_{n-1}^* + \frac{u_{n-1}^* - \frac{0.1\left(e^2-1\right)}{2} u_{n-1}^{*2}}{\frac{0.1\left(e^2-1\right)}{2}\left[u_{n-1}^* + \frac{0.1\left(e^2-1\right)}{2} u_{n-1}^{*2}\right] - 1}. \tag{7'}$$

En prenant pour u_0 les valeurs $u_0 = 3$ et $u_0 = 4.9$ on obtient les résultats compris dans le tableau 2.

Tableau 2

u_i	$u_0 = 3$	$u_0 = 4.9$
1	$0.316020072 \cdot 10$	$0.398352495 \cdot 10$
2	$0.314491069 \cdot 10$	$0.341520886 \cdot 10$
3	$0.314478856 \cdot 10$	$0.318278973 \cdot 10$
4	$0.314478877 \cdot 10$	$0.314561525 \cdot 10$
5	$0.314478877 \cdot 10$	$0.314478771 \cdot 10$
6	$-$	$0.14478877 \cdot 10$
u	$\approx \frac{2}{0{,}1(e^2-1)}$	$\approx \frac{2}{0{,}1(e^2-1)}$

En analysant ce tableau, il en résulte que si on choisit convenablement l'approximation initiale φ_0, à l'aide de la méthode de Steffensen on obtient la soltuion $\varphi(x) = \frac{2}{0.1(e^2-1)} e^x$.

Si dans le procédé $(7')$ on part d'une approximation initiale u_0, assez aprochée de zéro, alors on obtiendra la deuxième solution $\varphi(x) = 0$. L'exemple étudié précédemment illustre la valabilité des résultats théoriques obtenus dans cette note dans les sens suivants:

- il y a des cas où la méthode de l'itération simple ne converge pas vers la solution cherchée, quelque soit le choix de l'approximation initiale. Mais en appliquant la méthode de Steffensen et en choisissant l'approximation initiale d'une manière convenable on obtiendra la solution cherchée. (Ce fait est valable pour n'importe quelle méthode qui possède un ordre de convergence supérieur ou égal à 2).

-la méthode de Steffensen converge rapidement.

Remarquons, par exemple, qu'en partant de l'approximation intiale $u_0 = 4.9$ la méthode de l'itération simple est divergente, tandis que la méthode de Steffensen nous conduit au résultat désiré en 6 pas.

Pour $\varphi_0 = 3e^x$ on va essayer d'illustrer numériquement la rapidité de la convergence de la suite $\{\|P^*(\varphi_n^*(x))\|\}$ vers zéro.

Tableau 3

$Nr.$	φ_i^*	$\|P^*(\varphi_i^*)\|$	$\|P^*(\varphi_i)^*\|^2$
0	$3 \cdot e^x$	0.37471026334	0.14040778007
1	$3.16020072 \cdot e^x$	0.04201570293	0.0017653192
2	$3.14491069 \cdot e^x$	0.0003320011	0.000000109416
3	$3.14478856 \cdot e^x$	0.0000000697	0.0000000000
4	$3.14478877 \cdot e^x$	0.0000000000	0.0000000000

Dans ce tableau φ_i^* et P^* sont les valeurs approchées (numériques) des fonctions φ_i et de l'opérateur P. On en déduit qu'en prenant $\rho = 0.4$ alors, pour tout i sont satisfaites les inégalités

$$\left\| P^* \left(\varphi_{i+1}^* \right) \right\| \leq \rho \left\| P^* \left(\varphi_i^* \right) \right\|^2 , \quad i = 0, 1, \ldots ,$$

Ces inégalités caractérisent l'ordre de convergence de la méthode de Steffensen. Plus précisément elles nous montrent qu'il est égal à deux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Kantorovici, L. V., *Funcţionalîi analiz i pricladnaia matematica.* U.M.N., **28, 3** (1948).

[2] Kantorovici, L. V., *O metodî Niutona.* Trudî mat. i-ta im. Steklova. **28**, pp. 104–144 (1949).

[3] Jankó, B, şi Goldner, G., *Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale cu metoda lui Cebîşev.* (II), Studia Univ. Babeş-Bolyai Cluj **2**, pp. 55–58 (1968).

[4] Ghinea, Monique, *Sur la résolution des équations opérationnelles dans les espaces de Banach*, Revue Française de traitement de l'information **8**, pp. 3–22 (1965).

[5] Ostrowski, A. M., *Reşenie uravnenii i sistem uravnenii.* Izd. inost. lit., Moskva, (1963).

[6] Păvăloiu, I., *Asupra rezolvării ecuaţiilor operaţionale prin metode de iteraţie de ordin superior.* Lucrările colocviului de teoria aproximării funcţiilor (rezumat), Cluj 15-20 septembrie 1967.

clickable → [7] Păvăloiu, I., *Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires.* Revue Roumaine des Mathématiques Pures et Appliquées, XIII, (1968) 6, pp. 857–861.

clickable → [8] Păvăloiu, I., *Asupra operatorilor iterativi*, Studii şi Cercetări matematice (in print); appeared as: **23** (1971) no. 10, pp. 1567–1574.

clickable → [9] Păvăloiu, I., *Interpolation dans des espaces linéaires normés et applications.* Mathematica, Cluj, vol. 12 (35), 1, 1970, pp. 149–158.

[10] Stein, M. L., *Sufficient conditions for the Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **3**, pp. 858–863 (1952).

[11] Traub, J, F., *Iterative methods for the solution of equations.* Prentice-Hall. Inc. Englewood Cliffs N. J. 1964.

Reçu, 8.VII.1970