

SUR L'APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES EQUATIONS À
L'AIDE DES SUITES À ÉLÉMENTS DANS UN ESPACE DE
BANACH

par
ION PĂVĂLOIU
(Cluj-Napoca)

Soit X un espace de Banach et Y un espace linéaire normé.
On considère l'équation:

$$(1) \quad P(x) = \theta,$$

où $P : X \rightarrow Y$ et θ est l'élément nul de l'espace Y .

Nous désignons par $\Sigma = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, une suite à éléments dans l'espace X et par k un nombre naturel arbitraire.

DÉFINITION 1. *On dit que la suite Σ a l'ordre k par rapport à l'application P , s'il existe une constante non-négative ρ qui ne dépend pas de n , et telle que pour chaque $n = 0, 1, \dots$ soient satisfaites les inégalités suivantes:*

$$\|P(x_{n+1})\| \leq \rho \|P(x_n)\|^k$$

DÉFINITION 2. *On dit que la suite Σ a l'ordre de convergence k par rapport à l'application P , si les conditions suivantes sont remplies:*

- a) *la suite Σ a l'ordre k par rapport à l'application P ;*
- b) *la suite Σ est convergente.*

Si $S \in X$ est un ensemble à éléments dans l'espace X , nous désignerons par $S^* = \int(S)$, l'intérieur de cet ensemble.

Soit $s \geq 2$ un nombre naturel donné et P l'approximation qui détermine l'équation (1).

Dans cette note nous chercherons des conditions imposées à l'application P et à la suite Σ , pour que la suite Σ ait l'ordre de convergence s par

rapport à l'application P et de plus, si nous désignons par $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, pour que nous ayons alors $P(\bar{x}) = \theta$.

Par rapport au problème ci-dessus posé, on peut énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Si la suite Σ , l'application P et le nombre réel et positif δ sont tels que pour chaque point $x \in \text{Int}(S)$, où $S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta\}$, les conditions suivantes sont remplies:*

- i) *l'application P admet des dérivées du type Fréchet, jusqu'à l'ordre s ($s \geq 2$) inclusivement, sur chaque point de l'ensemble $\text{Int}(S)$ et*

$$\sup_{x \in \text{Int}(S)} \|P^{(s)}(x)\| \leq M < +\infty;$$

- ii) *Il existe une constante réelle et non-négative α , que ne dépend pas de n , telle que les inégalités suivantes sont remplies*

$$\left\| \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_n) (x_{n+1} - x_n)^i \right\| \leq \alpha \|P(x_n)\|^s,$$

où $x_n \in \Sigma \cap S^*$, $n = 0, 1, \dots$;

- iii) *Il existe une constante réelle et non-négative β qui ne dépend pas de n et telle que les inégalités suivantes sont remplies*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \beta \|P(x_n)\|,$$

où

$$x_n \in \Sigma \cap S^*, \quad n = 0, 1, \dots;$$

- iv) *les constantes α, β et les nombres réels M et δ satisfont aux inégalités suivantes:*

$$\rho_0 = v \cdot \|P(x_0)\| < 1 \text{ et } \frac{\beta \rho_0}{(1 - \rho_0) \cdot v} \leq \delta \text{ où}$$

$$v = \left(\alpha + \frac{M \beta^s}{s!} \right)^{\frac{1}{s-1}},$$

alors relativement à l'équation (1) et à la suite Σ ont lieu des propriétés suivantes:

- j) *la suite Σ a l'ordre de convergence s et si $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, alors*

$$P(\bar{x}) = \theta.$$
 jj) $\bar{x} \in S$
 jjj) $\|\bar{x}_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\beta \rho_0^n}{v}$

$$\begin{aligned} \text{jv)} \quad & \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\beta \rho_0^{s^n}}{v(1-\rho_0^{s^n})} \\ \text{v)} \quad & \|P(x_n)\| \leq \frac{\rho_0^{s^n}}{v} \end{aligned}$$

Démonstration. Nous démontrerons en premier lieu que les éléments de la suite Σ sont contenus en S^* , si les conditions du théorème énoncé sont remplies.

Pour x_1 on a:

$$(2) \quad \|x_1 - x_0\| \leq \beta \|P(x_0)\| \leq \frac{\beta v \|P(x_0)\|}{v} \leq \frac{\beta \rho_0}{v} < \frac{\beta \rho_0}{v(1-\rho_0)} \leq \delta,$$

d'où il résulte que $x_1 \in S^*$. En effet, en utilisant la formule de Taylor généralisée on déduit

$$\begin{aligned} \|P(x_1)\| & \leq \left\| P(x_1) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_0) (x_1 - x_0)^i \right\| \\ & \quad + \left\| \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_0) (x_1 - x_0)^i \right\| \\ & \leq \frac{M}{s!} \|x_1 - x_0\|^s + \alpha \|P(x_0)\|^s \\ & \leq \left(\frac{M\beta^s}{s!} + \alpha \right) \cdot \|P(x_0)\|^s, \end{aligned}$$

d'où on déduit:

$$(3) \quad \|P(x_1)\| \leq v^{s-1} \cdot \|P(x_0)\|^s.$$

Nous supposons que les propriétés suivantes sont remplies:

- 1) $x_i \in S^*$, $i = 0, 1, \dots, n$;
- 2) $\|x_i - x_{i-1}\| \leq \frac{\beta}{v} \cdot \rho_0^{s^{i-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- 3) $\|P(x_i)\| \leq v^{s-1} \|P(x_{i-1})\|^s$, $i = 1, 2, \dots, n$,

et dans ces hypothèses nous démontrerons que:

$$x_{n+1} \in S^*, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\beta}{v} \rho_0^{s^n} \quad \text{et} \quad \|P(x_{n+1})\| \leq v^{s-1} \cdot \|P(x_n)\|^s.$$

D'après ce que nous avons démontré ci-dessus, il résulte que les propriétés 1)-3) sont vérifiées pour $i = 1$.

En multipliant par v l'inégalité 3) et en désignant par $\rho_i = v \|P(x_i)\|$, $i = 1, 2, \dots, n$, nous déduisons facilement les inégalités:

$$(4) \quad \rho_i \leq \rho_0^{s^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Des inégalités (4) et de iii) on déduit

$$(5) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \beta \|P(x_n)\| = \frac{\beta v \|P(x_n)\|}{v} \leq \frac{\beta \rho_0^{s^n}}{v}.$$

De (5) on déduit:

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \sum_{i=0}^n \|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{\beta}{v} \sum_{i=0}^n \rho_0^{s^i} < \frac{\beta \rho_0}{v(1-\rho_0)} \leq \delta$$

d'où il résulte $x_{n+1} \in S^*$.

L'inégalité 2) pour $i = n + 1$ résulte de (5).

Pour la dernière inégalité on a:

$$\begin{aligned} \|P(x_{n+1})\| &\leq \left\| P(x_{n+1}) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_n) (x_{n+1} - x_n)^i \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x_n) (x_{n+1} - x_n)^i \right\| \\ &\leq \left(\alpha + \frac{M\beta^s}{s!} \right) \cdot \|P(x_n)\| = v^{s-1} \|P(x_n)\|^s. \end{aligned}$$

Par conséquent les propriétés 1)–3) sont remplies pour chaque $n = 1, 2, \dots$

La propriété 3) montre que la suite Σ a l'ordre s .

Nous démontrerons dans ce qui suit que la suite Σ est convergente. Pour ce faire nous démontrerons d'abord que la suite Σ est fondamentale.

Soient n et p deux nombres naturels.

On a:

$$(6) \quad \|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{\beta}{v} \sum_{i=n}^{n+p-1} \rho_0^{s^i} \leq \frac{\beta \rho_0^{s^n}}{v(1-\rho_0^{s^n})}.$$

De l'inégalité (6) il résulte que Σ est convergente.

Soit $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, alors de (6) il résulte l'inégalité:

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\rho_0^{s^n}}{v(1-\rho_0^{s^n})}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Il en résulte que $\bar{x} \in S$ et nous avons aussi obtenu l'inégalité jv). L'inégalité jjj) résulte de (6) pour $p = 1$.

Il reste à démontrer que \bar{x} est la solution de l'équation (1).

Nous avons prouvé que l'inégalité (4) est vraie pour chaque $n = 0, 1, \dots$. Alors on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$$

mais $\rho_n = v \|P(x_n)\|$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = P(\bar{x}) = \theta$.

Ceci achève la démonstration du théorème. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ghinea, M., *Sur la résolution des équations operationnelles dans les espaces de Banach*, Revue Francaise de traitement de l'information, **8**, 3–22, (1965).
- [2] Păvăloiu, I., *Sur les procédés iteratifs a un ordre élevé de convergence*, Mathematica, **12 (35)**, 2, 309–324, (1970).
- [3] Traub, J. F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs N. J. (1964).

Recu le 30.VI. 1976