MÉTHODES ITÉRATIVES OPTIMALES DE TYPE STEFFENSEN OBTENUES PAR INTERPOLATION INVERSE

par

CRĂCIUN IANCU, ION PĂVĂLOIU et IOAN ŞERB

Dans le travail [1] nous avons procédé à l'étude d'une classe de méthodes pour la résolution des équations de la forme:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

où $f : I \to R$, est une fonction réelle de variable réelle et I est un intervalle de l'axe réel. On parvient à celle classe de méthodes en utilisant la méthode d'interpolation inverse, à l'aide du polynôme d'interpolation de Hermite.

L'ordre de convergence des méthodes étudiées dans [1] dépend du nombre des noeuds et de leurs ordres de multiplicité.

Dans ce travail nous démontrerons que dans la classe de méthodes étudiées dans [1], il se détache une classe de méthodes de type Steffensen pour laquelle l'ordre de convergence est le plus grand. Dans ce qui suit les noeuds d'interpolation ne sont plus choisis de manière arbitraire, ils seront générés à l'aide de fonctions itératives.

Désignons par $\varphi_i : I \to I$, $i = 1,2, \dots ,n+1$, $n + 1$ fonctions itératives, c'est-à-dire des fonctions dont les points fixes coïncident avec les racines de l'équation (1) dans l'intervalle I.

Nous supposons également que les fonctions φ_i ; $i = \overline{1,n+1}$ et f vérifient le conditions suivantes :

$$|f(\varphi_i(x))| \leq \rho_i |f(x)|^{p_i} ; \quad i = 1,2,\dots,n+1 , \tag{2}$$

où ρ_i , $i = 1,2,\dots,n+1$, sont des nombres réels et positifs donnés et $p_i \geq 1$, $i = 1,2, \ldots ,n+1$ sont des nombres réels.

Désignons par $u_o \in I$, une approximation de la racine $\bar{x}$ de l'équation (1). Nous construisons les noeuds d'interpolation x_i^1, $i = 1,2,\ldots,n+1$, de la manière suivante:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} x_1^1 &= \varphi_1(u_o) \\ x_{i+1}^1 &= \varphi_{i+1}(x_i^1) \quad , \; i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

Nous posons $y_i = y_i^1 = f(x_i^1)$, $i = 1,2,\ldots,n+1$ et nous désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_{n+1}$, $n+1$ nombres naturels donnés, pour lesquels

$$\text{(4)} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1} = m + 1 \; , \quad m \in N.$$

Supposons maintenant que la fonction f , admet dans l'intervalle I des dérivées jousqu'à l'ordre $m + 1$ y compris et $f'(x) \neq 0$, pour chaque $x \in I$.

Dans l'hypothèse ci-dessus la fonction $f : I \longrightarrow F$, où $F = f(I)$ est bijective et donc il existe $f^{-1} : F \longrightarrow I$. Pour calculer les dérivées successives de la fonction f^{-1} on utilisera la formule établie dans le travail [2] :

$$\text{(5)} \qquad (f^{-1})^{(k)}(y) = \sum \frac{(2k-2-i_1)!(-1)^{k-1+i_1}}{i_2!\ldots i_k!(f'(x))^{2k-1}} \left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{i_1} \ldots \left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right)^{i_k}$$

où $y = f(x)$, et la somme ci-dessous s'étend à toutes les solutions en nombres entiers et non-négatifs du système d'équations:

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} i_2 + 2i_3 + \ldots + (k-1)i_k &= k-1 \\ i_2 + i_3 + \ldots + i_k &= k - 1. \end{aligned}$$

A l'aide des notations ci-dessus, le polynôme d'interpolation inverse de Hermite relatif aux noeuds y_i ayant les ordres de multiplicité α_i ; $i = 1,2,\ldots,n+1$; peut s'écrire sous la forme donnée dans le travail [2] :

$$\text{(7)} \qquad P(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} (f^{-1})^{(j)}(y_i) \frac{1}{k!\,j!} \left[\frac{(y-y_i)^{\alpha_i}}{\omega(y)}\right]^{(k)}_{y=y_i} \frac{\omega(y)}{(y-y_i)}$$

où

$$\text{(8)} \qquad \omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i)^{\alpha_i} .$$

L'evaluation du reste dans l'approximation de f^{-1} par P est donnée par la relation suivante :

$$\text{(9)} \qquad f^{-1}(y) - P(y) = \frac{(f^{-1})^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \, \omega(y) \; , \quad \xi \in F.$$

Si on suppose que l'équation (1) a une racine $\bar{x} \in I$, alors évidemment $\bar{x} = f^{-1}(0)$. Donc, si on néglige le reste dans la relation (9) et on tient compte de (7) on obtient pour $\bar{x}$ l'approximation suivante :

$$\text{(10)} \qquad u_1 = P(0).$$

L'évaluation de l'erreur est donnée par l'inégalité suivante :

$$|\bar{x} - u_1| \leq \frac{M}{(m + 1)!} \, |\omega(0)| \, ,$$

où $M = \sup_{y \in F} |(f^{-1})^{(m+1)}(y)|$.

Dans ces qui suit nous donnons une évaluation pour $|\omega(0)|$ en utilisant (2) et (3). Ainsi on a :

$$\begin{aligned} |f(x_1^1)| &= |f(\varphi_1(u_o))| \leq \rho_1 |f(u_o)|^{p_1}, \\ |f(x_2^1)| &= |f(\varphi_2(x_1^1)| \leq \rho_2 |f(x_1^1)|^{p_2} \leq \rho_2 \rho_1^{p_2} |f(u_o)|^{p_1 p_2} \\ |f(x_3^1)| &= |f(\varphi_3(x_2^1))| \leq \rho_3 |f(x_2^1)|^{p_3} \leq \\ &\quad \rho_3 \rho_2^{p_3} \rho_1^{p_2 p_3} |f(u_o)|^{p_1 p_2 p_3} , \end{aligned}$$

et d'une manière générale

$$\text{(12)} \qquad |f(x_{i+1}^1)| \leq \rho_{i+1} \rho_i^{p_{i+1}} \ldots \rho_1^{p_2 p_3 \cdots p_{i+1}} |f(u_o)|^{p_1 \cdots p_{i+1}},$$

$i = 1,2,\ldots,n$. De (8) on déduit :

(13) $$|\omega(0)| = \prod_{i=1}^{n+1} |f(x_i^1)|^{\alpha_i}$$

d'où à l'aide de (2) on déduit

(14) $$|\omega(0)| \leq \rho\, |f(u_0)|^{\alpha} ,$$

où

(15) $$\rho = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^{\alpha_i + \sum_{j=i+1}^{n+1} \alpha_j \prod_{k=i+1}^{j} p_k}$$

et

(16) $$\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \prod_{j=1}^{i} p_j .$$

De l'inégalité ci-dessus et de (11) on déduit l'inégalité suivante :

(17) $$|\bar{x} - u_1| \leq \frac{M\rho}{(m+1)!} |f(u_0)|^{\alpha} .$$

Si nous appliquons le procédé ci-dessus successivement, alors aprés k-ème pas d'itération, nous obtiendrons une approximation u_k. Les noeuds d'interpolation x_i^k , $i = \overline{1,n+1}$ qui correspondent au pas suivant si obtiennent d'une manière analogue à celle employée au premier pas en employant les relations :

(18) $$x_1^k = \varphi_1(u_{k-1})$$
$$x_{i+1}^k = \varphi_{i+1}(x_i^k) , \quad i = 1,2,\dots,n , \quad k \geq 2.$$

En procédant comme au premier pas, on obtient l'inégalité

(19) $$|\bar{x} - u_{k+1}| \leq \frac{M\rho}{(m+1)!} |f(u_k)|^{\alpha}, \quad k = 1,2,\dots .$$

Si nous posons

(20) $$\beta = \sup_{x \in I} |f'(x)| ,$$

alors les inégalités (19) deviennent :

(21) $$|\bar{x} - u_{k+1}| \leq \frac{M\rho\beta^{\alpha}}{(m+1)!} |\bar{x} - u_k|^{\alpha} ,$$

d'où nous déduisons :

(22) $$|\bar{x} - u_{k+1}| \leq C^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(C^{\frac{1}{1-\alpha}} |\bar{x} - u_0|\right)^{\alpha^{k+1}} ,$$

où $C = M\rho\beta^{\alpha}/(m+1)!$.

Si on suppose

(23) $$C^{\frac{1}{\alpha-1}} |\bar{x} - u_0| < 1 ,$$

de (22) il résulte:

(24) $$\lim_{k\to\infty} u_k = \bar{x} .$$

Désignons par $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ et $j_1, j_2, \dots, j_{n+1}$ deux permutations arbitraires des nombres $1,2,\dots,n+1$, et par

$$H(y_{k_1}^1, \alpha_{j_1}; y_{k_2}^1, \alpha_{j_2}; \dots ; y_{k_{n+1}}^1, \alpha_{j_{n+1}} / x) ,$$

le polynôme d'interpolation inverse d'Hermite de la forme (7), aux noeuds d'interpolation $y_{k_1}^1, \dots, y_{k_{n+1}}^1$ ayant les ordres de multiplicité $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_{n+1}}$ respectivement. A l'aide des notations ci-dessus nous considerons la classe de méthodes itératives suivante:

(25) $$u_s = H(y_{k_1}^s, \alpha_{j_1}; \dots ; y_{k_{n+1}}^s, \alpha_{j_{n+1}} / 0) , \quad s = 1,2, \dots ,$$

où

(26) $$y_{k_i}^s = f(x_{k_i}^s) , \quad i = 1,2, \dots ,n+1, \quad s = 1,2, \dots ,$$

et

(27) $$x_{k_1}^s = \varphi_{k_1}(u_{s-1})$$
$$x_{k_i}^s = \varphi_{k_i}(x_{k_{i-1}}^s) , \quad i = 2,3, \dots ,n+1, \quad s = 1,2,\dots .$$

A chaque paire de permutations $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ et $j_1, j_2, \dots, j_{n+1}$ des nombres $1,2, \dots ,n+1$ correspond une méthode itérative de la forme (25) - (27). On obtient de cette manière au total $(n+1)!$ méthodes itératives de cette forme. Ces méthodes sont généralement différentes.

Dans ces qui suit nous nous proposons de déterminer parmi ces $(n + 1)!$ méthodes de la forme (25) – (27), la méthode qui possède le plus grand ordre de convergence α, ordre donné par (16).

LEMME. <u>Considérons les nombres réels</u> $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ <u>et</u> $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$; $p_i \geq 1$ <u>et</u> $\alpha_i \geq 1$, $i = 1,2,\dots,n+1$, <u>tels que les relations suivantes sont vérifiées:</u>

(28) $$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{n+1} \;;\; \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n+1}.$$

<u>De tous les nombres de la forme:</u>

(29) $$\alpha = \alpha_{j_1} p_{k_1} + \alpha_{j_2} p_{k_1} p_{k_2} + \dots + \alpha_{j_{n+1}} p_{k_1} p_{k_2} \dots p_{k_{n+1}}$$

<u>où</u> $j_1, j_2, \dots, j_{n+1}$ <u>et</u> $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ <u>sont deux permutations arbitraires des nombres</u> $1,2,\dots,n+1$, <u>le plus grand est:</u>

(30) $$\alpha_{max} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_1 p_2 + \dots + \alpha_{n+1} p_1 p_2 \dots p_{n+1}.$$

<u>Démonstration</u>. Du premier lot d'inégalités (28) il résulte:

(31) $$\alpha_{j_1} p_{k_1} + \alpha_{j_2} p_{k_1} p_{k_2} + \dots + \alpha_{j_{n+1}} p_{k_1} p_{k_2} \dots p_{k_{n+1}} \leq \alpha_{j_1} p_1 + \alpha_{j_2} p_1 p_2 + \dots + \alpha_{j_{n+1}} p_1 p_2 \dots p_{n+1},$$

pour chaque permutation $j_1, j_2, \dots, j_{n+1}$ et $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$.

Nous posons

(32) $$b_i = p_1 p_2 \dots p_i, \quad i = 1,2,\dots,n+1,$$

et nous nous proposons de prouver l'inégalité suivante :

(33) $$\alpha_{j_1} b_1 + \alpha_{j_2} b_2 + \dots + \alpha_{j_{n+1}} b_{n+1} \leq \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_{n+1} b_{n+1},$$

pour chaque permutation $j_1, j_2, \dots, j_{n+1}$.

Pour $n = 1$ l'inégalité est évidente. Supposons l'inégalité vraie pour n paires de nombres : $(\alpha_1,b_1), \dots, (\alpha_n,b_n)$, c'est-à-dire:

(34) $$\alpha_{j_1} b_1 + \alpha_{j_2} b_2 + \dots + \alpha_{j_n} b_n \leq \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n,$$

pour $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$. Si on suppose $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, $b_1 \leq \dots \leq b_n \leq b_{n+1}$ et $\alpha_{j_1} = i$, alors de (34) il résulte:

$$\alpha_{j_1} b_1 + \dots + \alpha_{j_n} b_n + \alpha_{j_{n+1}} b_{n+1} = b_1(\alpha_{j_1} + \dots + \alpha_{j_{n+1}}) +$$

$$+ (b_2 - b_1)\alpha_{j_2} + (b_3 - b_1)\alpha_{j_3} + \dots + (b_{n+1} - b_1)\alpha_{j_{n+1}} \leq$$

$$b_1(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}) + (b_2 - b_1)\alpha_1 + (b_3 - b_1)\alpha_2 + \dots$$

$$\dots (b_i - b_1)\alpha_{i-1} + (b_{i+1} - b_1)\alpha_{i+1} + \dots + (b_{n+1} - b_1)\alpha_{n+1} \leq$$

$$b_1(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}) + (b_2 - b_1)\alpha_2 + (b_3 - b_1)\alpha_3 + \dots$$

$$\dots + (b_i - b_1)\alpha_i + (b_{i+1} - b_1)\alpha_{i+1} + \dots + (b_{n+1} - b_1)\alpha_{n+1} =$$

$$= b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \dots + b_{n+1} \alpha_{n+1},$$

ce qu'il fallait démontrer. L'inégalité (33) de la démonstration du lemme ci-dessus est connue ([3], p. 539). Des considérations ci-dessus et du lemme il résulte le

THEOREME. <u>De toutes les</u> $(n+1)!$ <u>méthodes itératives de la forme</u> (25) – (27), <u>celle pour laquelle on obtient l'ordre maximal de con-</u>

vergence est la méthode obtenue en rangeant les nombres p_i en ordre décroissant et les nombres α_i en ordre croissant.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. C. IANCU, I. PAVALOIU, La résolution des équations par interpolation inverse de type Hermite. Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods, "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminaries, Preprint Nr. 4 (1981), 72-84.

[2]. I. PAVALOIU, Rezolvarea ecuatiilor prin interpolare. Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981.

[3]. S. POPA, Asupra unei probleme a lui P. Erdös si G. Weiss, Studii şi Cercetări Matematice, 33, 5 (1981), 539-542.