

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE
 STEFFENSEN

ION PĂVĂLOIU
 (Cluj-Napoca)

Soit X un espace de Banach et

$$(1) \quad f(x) = \theta$$

une équation, où $f : X \rightarrow X$ est une application et θ est l'élément nul de l'espace X .

Désignons par $[u, v; f]$ la différence divisée du premier ordre de l'application f sur les points $u, v \in X$ et par $[u, v, w; f]$ la différence divisée de deuxième ordre de cette application sur les points $u, v, w \in X$. Ces différences ont été introduites dans les travaux [1], [2], [5], [6], [7]. Supposons leur symétrie comme fonctions des points sur lesquels elles sont définies. À côté de l'équation (1) nous considérons une application $g : X \rightarrow X$ à l'aide de laquelle nous construisons la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par le procédé itératif suivant:

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n - [x_n, g(x_n); f]^{-1} f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

x_0 étant un élément arbitraire de X .

Il est bien connu que la différence divisée $[x_n, g(x_n); f]$ est une application linéaire de X en lui-même, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sera bien définie dans le cas où cette application admettra une inverse pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Nous admettrons le fait que l'application $[x_0, g(x_0); f]$ admet un inverse $[x_0, g(x_0); f]^{-1}$ et nous donnerons des conditions supplémentaires pour que tous les éléments de la suite $([x_n, g(x_n); f])_{n=0}^{\infty}$ soient inversibles. En même temps nous donnerons des conditions pour la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, fournie par la relation (2).

On remarque que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, fournie par la méthode (2), coïncide avec la suite $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par les égalités suivantes:

$$(3) \quad y_{n+1} = g(y_n) - [y_n, g(y_n); f]^{-1} f(g(y_n)),$$

où $y_0 = x_0, n = 1, 2, \dots$

Considérons les nombres réels et positifs $B_0, K, \alpha, \rho, \lambda$ et $d_0 = \|f(x_0)\|$.

Désignons par $q \geq 2$ un nombre réel quelconque. Considérons l'ensemble

$$(4) \quad S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \lambda\}, \quad x_0 \in X$$

et désignons par a la plus petite racine de l'équation:

$$(5) \quad (1 + \rho)t^2 - [2(1 + \rho) + \alpha d_0^{q-2}]t + 1 + \rho = 0.$$

En ce qui concerne la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par (2) on a le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si les applications f et g et les nombres réels B_0 , K , α , ρ , λ et q vérifient les conditions suivantes:*

- i. $\|f(g(x))\| \leq \alpha \|f(x)\|^{q-1}$ pour chaque $x \in S$;
- ii. la différence divisée $[u, v; g]$ est symétrique comme fonction de u et v et $\|[u, v; g]\| \leq \rho$, pour chaque $u, v \in S$;
- iii. $\|[u, v, w; f]\| \leq K$, pour chaque $u, v, w \in S$;
- iv. il existe l'application $[x_0, g(x_0); f]^{-1}$ et $\|[x_0, g(x_0); f]^{-1}\| \leq B_0$;
- v. $B_0^2 K (1 + \rho) \|f(x_0)\| \leq a$;
- vi. $\lambda \geq \max\{\mu, \rho\mu + \|g(x_0) - x_0\|\}$ où

$$\mu = B_0 b^{\frac{1}{q-1}} \cdot \frac{c\delta_0}{1-(c\delta_0)^{q-1}}, \quad c = \frac{1}{(1-a)^2}, \quad b = KB_0^2\alpha,$$

$$\delta_0 = b^{\frac{1}{q-1}} d_0;$$

- vii. $c\delta_0 < 1$;

alors l'équation (1) a au moins une solution $\bar{x} \in S$, $\bar{x} = \lim x_n$ et on a la délimitation suivante:

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot \frac{(c\delta_0)^{q^n}}{1-(c\delta_0)^{q^n(q-1)}}$$

Démonstration. Désignons par:

$$D_i = [x_i, g(x_i); f] \quad \text{et} \quad \Gamma_i = D_i^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Si nous envisageons les notations ci-dessus, nous déduisons de (2) et (3) les relations suivantes:

$$(6) \quad x_1 = x_0 - \Gamma_0 \cdot f(x_0)$$

$$(7) \quad x_1 = g(x_0) - \Gamma_0 \cdot f(g(x_0))$$

d'où l'on déduit:

$$(8) \quad \|x_1 - x_0\| \leq B_0 d_0$$

$$(9) \quad \|x_1 - g(x_0)\| \leq B_0 \alpha d_0^{q-1}$$

En employant l'identité:

$$f(x_1) = f(x_0) + [x_0, g(x_0); f](x_1 - x_0) + [x_1, x_0, g(x_0); f](x_1 - x_0)(x_1 - g(x_0))$$

de iii, (6), (7), (8), (9) et de l'hypothèse $x_1 \in S$ on déduit.

$$(10) \quad \|f(x_1)\| \leq KB_0^2 \alpha d_0^q.$$

Pour prouver que $x_1 \in S$ nous remarquons que la plus petite racine de l'équation (5) vérifie la relation $0 < a < 1$, donc $c = \frac{1}{(1-a)^2} > 1$.

Alors de (8) il résulte que:

$$\|x_1 - x_0\| \leq B_0 d_0 \leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot c b^{\frac{1}{q-1}} d_0 \leq B_0 \cdot b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot c \delta_0 \leq \mu \leq \lambda$$

c'est-à-dire $x_1 \in S$.

Par la suite nous prouvons l'existence de l'application $\Gamma_1 = D_1^{-1}$.

En employant les propriétés des différences divisées et les et les hypothèses du théorème on a:

$$\begin{aligned} (11) \quad \|D_0 - D_1\| &= \\ &= \|[x_0, g(x_0); f] - [x_1, g(x_1); f]\| \\ &\leq \|[x_0, g(x_0); f] - [x_1, g(x_0); f]\| + \|[x_1, g(x_0); f] - [x_1, g(x_1); f]\| \\ &\leq K B_0 d_0 + K \rho B_0 d_0 = K(1 + \rho) B_0 d_0. \end{aligned}$$

Pour établir la dernière inégalité on emploie le fait que $g(x_0), g(x_1) \in S$. Démontrons maintenant ces appartenances. En effet on a:

$$\|g(x_0) - x_0\| < \|g(x_0) - x_0\| + \rho \mu \leq \lambda$$

et

$$\|g(x_1 - x_0)\| \leq \|g(x_1) - g(x_0)\| + \|g(x_0) - x_0\| \leq \rho \mu + \|g(x_0) - x_0\| \leq \lambda.$$

De (11) on déduit:

$$\|\Gamma_0 \cdot (D_0 - D_1)\| \leq B_0^2 K(1 + \delta) d_0 \leq a.$$

Du fait que $0 < a < 1$ et de l'hypothèse (vi) il résulte qu'on peut inverser l'opérateur

$$H_0 = I - \Gamma_0(D_0 - D_1),$$

où I représente l'application identique.

On a:

$$\|H_0^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}.$$

Remarquons par la suite que:

$$H_0 = \Gamma_0 D_1$$

c'est-à-dire

$$H_0^{-1} = D_1^{-1} \cdot \Gamma_0^{-1}$$

d'où l'on déduit

$$D_1^{-1} = \Gamma_1 = H_0^{-1} \cdot \Gamma_0$$

et

$$\|\Gamma_1\| \leq \frac{B_0}{1-a}.$$

Si nous désignons par B_1 l'expression $\|\Gamma_1\|$, l'inégalité ci-dessus devient:

$$(12) \quad B_1 \leq \frac{B_0}{1-a}$$

Prouvons maintenant que:

$$B_1^2 K (1 + \rho) d_1 < a.$$

En effet de (10) et (12) on déduit

$$\begin{aligned} B_1^2 K (1 + \rho) d_1 &\leq \frac{B_0^4 K^2 (1 + \rho) \alpha d_0^q}{(1-a)^2} = \frac{[B_0^2 \cdot K \cdot (1 + \rho) d_0]^2}{(1-a)^2 (1 + \rho)} \cdot \alpha \cdot d_0^{q-2} \\ &\leq \frac{a^2 \alpha d_0^{q-2}}{(1-a)^2 (1 + \rho)} = a. \end{aligned}$$

La dernière égalité est justifiée du fait que a représente la plus petite racine de l'équation (5).

Supposons par la suite que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- α) il existe les opérateurs $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_s$;
- β) $B_i \leq \frac{B_{i-1}}{1-a}$ où $B_i = \|\Gamma_i\|$ $i = 1, 2, \dots, s$;
- γ) $B_s^2 K (1 + \rho) d_s \leq a$, $d_s = \|f(x_s)\|$;
- δ) $x_i \in S$, $g(x_i) \in S$, pour $i = 1, 2, \dots, s + 1$

Dans ces hypothèses, en employant une identité analogue à celle de laquelle on a déduit la relation (10), on a l'inégalité suivante:

$$(13) \quad \|f(x_{s+1})\| \leq K B_s^2 \alpha \|f(x_s)\|^q$$

c'est-à-dire:

$$d_{s+1} \leq K B_s^2 \alpha d_s^q$$

Mais de β) il résulte l'inégalité suivante:

$$d_{s+1} \leq \frac{K B_0^2 \alpha d_s^q}{(1-a)^{2s}}$$

où

$$(14) \quad d_{s+1} \leq b c^s d_s^q.$$

Des hypothèses de l'induction il résulte les inégalités suivantes:

$$d_{i+1} \leq b c^i d_i^q, \quad i = 0, 1, \dots, s.$$

En multipliant par $\frac{1}{b^{q-1}}$ les termes des dernières inégalités et en désignant par δ_i l'expression:

$$\delta_i = b^{-\frac{1}{q-1}} d_i, \quad i = 0, 1, \dots, s$$

nous obtenons:

$$\delta_{i+1} \leq c^i \cdot \delta_i^q, \quad i = 0, 1, \dots, s.$$

Admettons maintenant l'existence des nombres:

$$\alpha_i \text{ et } \beta_i, \quad i = 0, 1, \dots, s$$

tels que:

$$\delta_i \leq c^{\alpha_i} \delta^{\beta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

où $\beta_0 = 1$ et $\alpha_0 = 0$. Alors on a:

$$\delta_{i+1} \leq c^i c^{q\alpha_i} \delta_0^{\beta_i q}$$

c'est-à-dire

$$\delta_{i+1} \leq c^{q\alpha_i + i} \delta_0^{\beta_i q} = c^{\alpha_{i+1}} \cdot \delta_0^{\beta_{i+1}}$$

où $\alpha_{i+1} = q\alpha_i + i$, $\alpha_0 = 0$, $i = 0, 1, \dots, s$; et $\beta_{i+1} = q \cdot \beta_i$, $\beta_0 = 1$, $i = 0, 1, \dots, s$.

Des relations ci-dessus nous déduisons facilement que:

$$\alpha_i = \frac{i-1-iq+q^i}{(q-1)^2}, \quad \beta = q^i, \quad i = 0, 1, \dots, s.$$

Alors si nous envisageons le fait que $c > 1$, nous déduisons les inégalités suivantes:

$$(15) \quad \delta_{i+1} \leq (c\delta_0) q^{q^{i+1}}; \quad i = 0, 1, \dots, s.$$

Démontrons maintenant que l'application Γ_{s+1} existe.

En effet on a:

$$\|D_s - D_{s+1}\| = \|[x_s, g(x_s); f] - [x_{s+1}, g(x_{s+1}); f]\| \leq K(1 + \rho)(B_s d_s)$$

et

$$\|\Gamma_s(D_s - D_{s+1})\| \leq K(1 + \rho) B_s^2 d_s \leq a.$$

Par conséquent l'application

$$H_s = I - \Gamma_s \cdot (D_s - D_{s+1}) = \Gamma_s D_{s+1}$$

admet une inverse pour laquelle

$$\|H_s^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}.$$

Des relations ci-dessus nous déduisons que:

$$D_{i+1}^{-1} = \Gamma_{i+1} = H_i^{-1} \cdot \Gamma_i$$

c'est-à-dire

$$\|\Gamma_{i+1}\| \leq \frac{B_i}{1-a}$$

ce qui nous conduit à l'inégalité suivante:

$$(16) \quad B_{s+1} \leq \frac{B_s}{1-a}$$

c'est-à-dire à l'inégalité β) pour $i = s + 1$.

Démontrons maintenant qu'on a l'inégalité γ) pour $s + 1$ c'est-à-dire:

$$B_{s+1}^2 K(1 + \rho) d_{s+1} \leq a.$$

En effet de (15) il résulte $d_s \leq d_0$ et alors de (13) et (16) déduisons:

$$\begin{aligned} B_{s+1}^2 K (1 + \rho) d_{s+1} &\leq \frac{B_s^2 K (1 + \rho)}{(1-a)^2} K B_s^2 \alpha d_s^q \\ &= \frac{B_s^2 K (1 + \rho) d_s}{(1-a)^2 (1 + \rho)} \alpha d_s^{q-2} \leq \frac{a^2 \alpha d_s^{q-2}}{(1-a)^2 (1 + \delta)} \leq a. \end{aligned}$$

Démontrons par la suite l'appartenance de x_{i+1} et celle de $g(x_{s+1})$ à la sphère S .

On démontre facilement que $\alpha_{s+1} + \frac{s+1}{2} \leq q^{s+1}$, pour $q \geq 2$, pour chaque $s \in \mathbb{N}$; alors on déduit de (2)

$$\begin{aligned} \|x_{s+2} - x_{s+1}\| &\leq \|\Gamma_{s+1}\| \cdot \|f(x_{s+1})\| \leq \frac{B_0}{(1-a)^{s+1}} \\ &\leq B_0 \cdot c^{\frac{s+1}{2}} \cdot c^{\alpha_{s+1}} \cdot \delta_0^{\beta_{s+1}} \cdot b^{-\frac{1}{q-1}} \\ &\leq c^{\alpha_{s+1} + \frac{s+1}{2}} \cdot \delta_0^{\beta_{s+1}} \cdot B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \\ &\leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} (c\delta_0)^{q^{s+1}}. \end{aligned}$$

Des relations ci-dessus il résulte les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} \|x_{s+2} - x_0\| &\leq \sum_{k=0}^{s+1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \sum_{k=0}^{s+1} (c\delta_0)^{q^k} \\ &< \frac{B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot c \cdot \delta_0}{1 - (c\delta_0)^{q-1}} \leq \mu < \lambda \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|g(x_{s+2}) - x_0\| &\leq \\ &\leq \|g(x_{s+2}) - g(x_{s+1})\| + \cdots + \|g(x_1) - g(x_0)\| + \|g(x_0) - x_0\| \\ &\leq \rho\mu + \|g(x_0) - x_0\| \leq \lambda, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $x_{s+2} \in S$ et $g(x_{s+2}) \in S$.

Nous étudions par la suite la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$.

Des inégalités.

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{B_0}{b^{\frac{1}{q-1}}} (c\delta_0)^{q^k},$$

que sont vraies pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il résulte

$$\begin{aligned} (17) \quad \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot \sum_{k=n}^{n+p-1} (c\delta_0)^{q^k} \\ &\leq \frac{B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} (c\delta_0)^{q^n}}{1 - (c\delta_0)^{(q-1)q^n}} \end{aligned}$$

pour chaque $n, p \in \mathbb{N}$.

En envisageant le fait que $c \cdot \delta_0 < 1$ et le fait que l'espace X est complet, il résulte que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente.

Désignons par \bar{x} la limite; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. De l'inégalité (17) en y faisant $p \rightarrow \infty$ on déduit:

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} (c\delta_0)^{q^n}}{1 - (c\delta_0)^{(q-1)q^n}}$$

De $\delta_n \leq (c\delta_0)^{q^n}$ il résulte que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\bar{x}) = \theta$$

ce qui signifie que \bar{x} est la solution de l'équation (1). □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Balasz M. și Goldner G., *Diferențe divizate în spații Banach și unele aplicații ale lor*. St. cerc. mat. 21, 7, (1969), pp. 985–995.
- clickable soon → [2] Diaconu A., *Interpolation dans les espaces arbitraires. Méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles obtenus par l'interpolations inverse. III*. Research Seminar of Functional Analysis and Numerical Methodes, Preprint Nr.1 1985, pp. 21–70.
- [3] Lică Dionis, *Analiza funcțională și rezolvarea aproximativă a ecuațiilor neliniare*. Editura Științifică, Kișinău, 1975.
- clickable → [4] Păvăloiu I. *Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires*, Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées. **XIII**, 1, (1968), pp. 149–158.
- available soon,
refresh and click here → [5] Păvăloiu I., *Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor*. Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
- [6] Ul'm, S., *Ob oboscennih razdelennih raznostiah I*, Izv. Acad. Nauk. Estonskoi S.S.R. 16, 1, (1967), pp. 13–26.
- [7] Ul'm, S. *Ob oboscennih razdelennih raznostiah II*, Izv. Acad. Nauk. Estonskoi S. S.R. 16, 2, (1967), pp. 146–155

Reçu le 20.XII. 1990

Institutul de Calcul
Str. Republicii, 37
3400 Cluj-Napoca
România