REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 21, N° 2, 1992, pp. 131–134

SUR LE RESTE DANS UN PROCÉDÉ D'INTERPOLATION

MIRCEA IVAN
(Cluj-Napoca)

Considérons un espace linéaire $\mathscr{Q}$ et soit Y un de ses sous-espaces. Soit S un sous-espace maximal de Y et soit y un élément de l'ensemble $Y \setminus S$.

DÉFINITION 1. L'opérateur linéaire $U : \mathscr{Q} \to \mathscr{Q}$ est dit opérateur d'interpolation par rapport au sous-espace S si les conditions suivantes sont remplies :

1) $$Ux \in S, \ \forall x \in \mathscr{Q};$$

2) $$Us = s, \forall s \in S. \quad [1]$$

Convenons sur les notations suivantes :

$\mathscr{U}$, un ensemble d'opérateurs d'interpolation.

$\mathscr{V}$, l'ensemble des opérateurs d'interpolation par rapport au sous-espace S.

On a défini sur l'ensemble $\mathscr{U}$ la relation d'ordre $V < U$ à l'aide des égalités $UV = VU = V$.

DÉFINITION 2. On dit que la fonctionnelle linéaire F est une différence divisée généralisée attachée à l'opérateur $U \in \mathscr{U}$ si les conditions suivantes sont remplies :

$$3)\ FU = U;$$

$$4)\ F(S) = \{0\};$$

$$5)\ F(y) = 1. \quad [2]$$

THÉORÈME 1. *Pour tout opérateur $U \in \mathscr{U}$ il existe une unique différence divisée attachée à l'opérateur U.* [2]

Compte tenu du fait que la fonctionnelle du type différence divisée attachée à l'opérateur d'interpolation U par l'intermédiaire des conditions antérieures est unique, nous pouvons la désigner en utilisant la notation $[U ; \circ]$.

THÉORÈME 2. *Quel que soit l'opérateur* $V \in U$, $V < U$ *la relation*

$$U = V + (y - Vy)[U\,;\cdot]$$

est remplie. [2]

Soit maintenant (X, ρ) un espace métrique et soit $\mathscr{H}$ un espace linéaire des fonctions réelles définies sur X, muni d'un produit scalaire $(.,.)$.

DÉFINITION 3. On appelle noyau reproducteur par rapport au point $x \in X$, une fonction $K_x \in \mathscr{H}$ qui vérifie la condition

$$(u, K_x) = u(x), \ \forall u \in \mathscr{H} \quad [3].$$

Supposons que pour chaque $x \in X$ il existe un noyau K_x par rapport au point x. Supposons aussi que pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, les fonctions K_x et K_y sont linéairement indépendantes.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des points distincts.

Désignons par E_n, respectivement E_x l'enveloppe linéaire des ensembles $\{K_{x_1}, K_{x_2}, \ldots, K_{x_n}\}$, respectivement

$$\{K_x, K_{x_1}, K_{x_2}, \ldots, K_{x_n}\}.$$

Soient P_n respectivement P_x les opérateurs de projection orthogonale sur les sous-espaces E_n et E_x. On vérifie facilement que P_n et P_x sont des opérateurs d'interpolation relatifs aux sous-espaces E_n et E_x. On constate aussi que $P_n < P_x$.

THÉORÈME 3. *Pour tout* $u \in \mathscr{H}$ *et pour tout* $x \in X$ *la relation suivante*

$$u(x) = P_n u(x) + (K_x(x) - P_n K_x(x)) \frac{[P_x\,; u]}{[P_x\,; K_x]}$$

est satisfaite.

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{H}$ et soit $x \in X$. Conformément au Théorème 1 il existe un element $f_x \in E_x \setminus E_n$ tel que

$$P_x u = P_n u + f_x[P_x\,; u],$$

d'où il découle

$$P_x u(x) = P_n u(x) + f_x(x)[P_x\,; u],$$

c'est à dire

$$(P_x u,\ K_x) = P_n u(x) + f_x(x)[P_x\,;\ u].$$

On déduit successivement :

$$u(x) = (u, K_x) = (u, P_x K_x) = (P_x u, K_x) = P_x u(x),$$

ainsi donc

$$u(x) = P_n u(x) + f_x(x)[P_x\,;\ u].$$

On voit donc que le reste $u(x) - P_n u(x)$ est exprimé a l'aide d'une différence divisée généralisée.

De plus, pour $u = K_x$, on obtient

$$f_x = \frac{K_x - P_n K_x}{[P_n\,;\ K_x]}.$$

Ainsi le théoreme est démontré.

Exemple 1. $X = [a, b] \times [c, d]$,

$$\mathscr{H} = \left\{ u / u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C(X) \right\},$$

$$(u, v) = \iint_X \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) dx dy,$$

$$R_x(\xi) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,(b - a)} \{\mathrm{ch}\,(\xi + x - a - b) + \mathrm{ch}(|\xi - x| + a - b)\},$$

$$S_y(\eta) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,(d - c)} \{\mathrm{ch}(\eta + y - c - d) + \mathrm{ch}\,(|\eta - y| + c - d)\},$$

$$K_{(x,\,y)}(\xi, \eta) = R_x(\xi) \cdot S_y(\eta). \quad [3]$$

Exemple 2. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x\}$

Définissons sur $\mathscr{H}$ le produit scalaire

$$(f, g) = f(x) \cdot g(x) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot g(x_k), f,\ g \in \mathscr{H}.$$

Dans le cas de l'interpolation habituelle du type Lagrange on a :

$$P_n = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \cdot),$$

$$P_x = L(x_1, x_2, \ldots, x_n, x; \cdot),$$

$$[P_x; \cdot] = [x_1 \cdot x_2, \ldots, x_n, x; \cdot],$$

$$K_x(\xi) = \frac{(\xi - x_1)(\xi - x_2) \ldots (\xi - x_n)}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Ivan, *Opérateurs d'interpolation dans des espaces abstraits*, Mathematica, **4**, *1* (1975), 19–28
2. M. Ivan, *Différences divisées généralisées et fonctionnelles de la forme simple.* Mathematica, **9**, *1* (1980), 55–58.
3. Cui Ming-Gen, Zhang Mian, Deng zhoug Xing, *Two-dimensional reproducing kernel and surface interpolation*, J. Computational Mathematics, **4**, *2* (1986), 177–181.
4. M. Ivan, *Sur une suite d'opérateurs d'interpolation et d'approximation dans un espace de Hilbert*, Mathematica, **20**, *1–2*, (1991), 43–46.

Reçu le 20 août 1991

Institutul Politehnic Cluj-Napoca
Str. C. Daicoviciu 15, Dept. MATEMATICA
(3400) Cluj-Napoca
ROMANIA