

SUR LA MÉTHODE DE STEFFENSEN  
POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS  
OPÉRATIONNELLES NON LINÉAIRES\*

par  
ION PĂVĂLOIU  
(Cluj)

**Abstraite.** Ce travail représente une contribution à l'étude de la convergence du procédé généralisé de Steffensen. En partant du travail [2], on apporte des améliorations aux théorèmes d'existence et d'unicité de la solution de l'équation

$$x = A(x)$$

où  $A$  est un opérateur non linéaire défini dans l'espace  $X$  de type Banach et qui transforme cet espace en lui-même.

Soit donnée l'équation

$$(1) \quad F(x) = x - A(x) = \theta$$

où  $A$  est un opérateur non linéaire qui transforme l'espace de Banach  $X$  en lui-même.

J. W. Schmith [1] a défini les différences divisées généralisées à l'aide d'un opérateur linéaire  $[x, y; F]$  qui possède la propriété:

$$(2) \quad F(y) - F(x) = [x, y; F](y - x), \quad x, y \in X.$$

Pour l'équation (1) la méthode généralisée de Steffensen a la forme suivante:

$$(3) \quad x_{n+1} = x_n - [x_n, A(x_n); F]^{-1} F(x_n)$$

Cette méthode est équivalente à la suivante

$$(4) \quad x_{n+1} = A(x_n) - [x_n, A(x_n); F]^{-1} F(A(x_n))$$

---

\*Travail communiqué à la séance de communications du 30 avril 1967 de l'Institut de Calcul, Cluj.

S. Ulm [2] a donné un théorème dans lequel il a établi des conditions de convergence pour un tel procédé. Dans ce travail l'auteur a donné aussi un théorème d'unicité de la solution de l'équation (1) obtenue par le procédé (3).

Le but de notre travail est d'établir un autre théorème de convergence du procédé (3) dans d'autres hypothèses.

Pour simplifier on désignera par  $\Gamma_n$  l'opérateur  $[x_n, A(x_n); F]^{-1}$ .

Le procédé (3) peut être écrit aussi sous la forme

$$(5) \quad x_{n+1} = x_n - \Gamma_n F(x_n)$$

et (4) prendra alors la forme

$$x_{n+1} = A(x_n) - \Gamma_n F(A(x_n)).$$

Dans ce qui suit on supposera que l'opérateur  $A$  est continu dans un domaine convenable.

THÉORÈME 1. Si

- a)  $\Gamma_0$  est borné c'est-à-dire  $\|\Gamma_0\| \leq B_0$ ;
- b)  $\max\{\|x_1 - x_0\|, \|x_1 - A(x_0)\|\} \leq h_0$ ;
- c)  $\|[x', x''; A] - [x'', x'''; A]\| \leq K \|x' - x'''\|$  pour tout  $x', x'', x''' \in S$ ;
- c')  $\|[x', x''; A]\| \leq M$  pour tout  $x', x'' \in S$  et  $M < 1$

où

$$S = \{x \in X; \|x - x_0\| \leq 2h_0\}$$

- d)  $\eta_0 = B_0 K h_0 < \frac{1}{4}$

alors dans la sphère  $S$  de l'espace  $X$  l'équation (1) a une seule solution  $x^*$  que l'on obtient comme limite de la suite générée par le procédé (3) ou (4) et pour laquelle on a

$$(6) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{h_0}{2^{n-1}}$$

$$(7) \quad \|x^* - x_n\| \leq B_n K \|x^* - x_{n-1}\| \|x^* - A(x_{n-1})\|$$

où

$$B_n = \|\Gamma_n\|.$$

Démonstration. Si on tient compte de l'hypothèse c) on a

$$\|\Gamma_0\{[x_0, A(x_0); F] - [x_1, A(x_1); F]\}\| \leq 2B_0 K h_0 = 2\eta_0 < \frac{1}{2}$$

donc l'opérateur

$$\Delta_0 = E - \Gamma_0\{[x_0, A(x_0); F] - [x_1, A(x_1); F]\}$$

admet un inverse pour lequel on a

$$\|\Delta_0^{-1}\| \leq \frac{1}{1-2\eta_0}.$$

Un calcul simple nous montre que

$$\Gamma_1 = \Delta_0^{-1}\Gamma_0 \quad \text{et} \quad \|\Gamma_1\| \leq \|\Delta_0^{-1}\| \|\Gamma_0\| \leq \frac{B_0}{1-2\eta_0}$$

De (3) on déduit

$$\|x_2 - x_1\| \leq \|\Gamma_1\| \|F(x_1)\|.$$

Mais de (2) on peut déduire facilement l'identité

$$\begin{aligned} F(x_1) = & F(x_0) + [x_0, A(x_0); F](x_1 - x_0) + \\ & + \{ [x_1, x_0; F] - [x_0, A(x_0); F] \} (x_1 - x_0). \end{aligned}$$

Si l'on tient compte encore de la première itération on en déduit

$$\|F(x_1)\| \leq Kh_0^2.$$

Ce qui conduit à l'évaluation suivante concernant la norme de la différence  $x_2 - x_1$

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{B_0Kh_0^2}{1-2\eta_0}.$$

En tenant compte maintenant de l'inégalité d) on a

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{B_0Kh_0^2}{1-2\eta_0} \leq \frac{1}{2}h_0.$$

En raisonnant d'une manière analogue on déduit que

$$\|x_2 - A(x_1)\| \leq \frac{B_0Kh_0^2}{1-2\eta_0} \leq \frac{1}{2}h_0.$$

On désignera par  $\eta_1 = B_1Kh_1$  alors on a

$$\max \{ \|x_2 - A(x_1)\|, \|x_2 - x_1\| \} \leq \frac{B_0Kh_0^2}{1-2\eta_0} = h_1$$

donc

$$\eta_1 = B_1Kh_1 \leq \frac{B_0^2K^2h_0^2}{(1-2\eta_0)^2} < \frac{1}{4}.$$

Par induction on peut démontrer facilement que les relations suivantes ont lieu:

$$(8) \quad B_n = \|\Gamma_n\| \leq \frac{B_{n-1}}{1-2\eta_{n-1}}$$

$$(9) \quad \eta_{n-1} \leq \frac{1}{4}$$

$$(10) \quad h_n = \frac{B_{n-1}Kh_{n-1}^2}{1-2\eta_{n-1}}$$

$$(11) \quad \max \{ \|x_{n+1} - x_n\|, \|x_{n+1} - A(x_n)\| \} \leq \frac{B_{n-1}Kh_{n-1}^2}{1-2\eta_{n-1}} = h_n$$

pour tout  $n = 1, 2, \dots$

On peut remarquer que la suite de nombres

$$\|x_1 - x_0\|, \|x_2 - x_1\|, \dots, \|x_n - x_{n-1}\|, \dots,$$

satisfait la propriété suivante:

$$\|x_i - x_{i-1}\| \leq h_{i-1}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots,$$

et

$$h_{i-1} \leq \frac{1}{2} h_{i-2}$$

Nous allons montrer maintenant que les éléments de la suite:

$$(12) \quad x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

appartiennent à la sphère  $S$ .

En effet pour tout  $n$  on a

$$\|x_n - x_0\| \leq h_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \leq 2h_0$$

d'où il résulte que  $x_n \in S$  pour tout  $n = 1, 2, \dots$ . Nous allons montrer à présent que la suite (12) est une suite fondamentale.

En effet on a

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq h_0 \left( \frac{1}{2^{n+p-1}} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \leq \frac{h_0}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand  $p \rightarrow \infty$  on en déduit

$$(13) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{h_0}{2^{n-1}}.$$

Il en résulte que la suite (12) est convergente et  $x^* \in S$ . On peut aussi déduire facilement qu'on a

$$(14) \quad \|x^* - A(x_n)\| \leq \frac{h_0}{2^{n-1}}.$$

L'inégalité (7) se déduit facilement; c'est pourquoi on n'en donnera pas la démonstration dans ce travail.

En passant à la limite dans l'égalité (3) et en tenant compte du fait que  $[x_n, A(x_0); F]$  est un opérateur additif et borné pour tout  $n$ , il résulte que  $x^*$  vérifie l'équation (1).

Nous allons démontrer que  $x^*$  est l'unique solution de l'équation (1).

En effet, en supposant que  $x^*$  et  $x^{**}$  sont deux solutions de l'équation (1) qui appartiennent à la sphère  $S$  on a

$$\|x^* - x^{**}\| \leq M \|x^* - x^{**}\| < \|x^* - x^{**}\|$$

ce qui est possible seulement si  $x^* = x^{**}$ . □

REMARQUE. Si  $B_n$  est borné, alors l'ordre de convergence du procédé de Steffensen est 2. Cela résulte de l'inégalité (10). C'est-à-dire  $\|B_n\| \leq B$  pour tout  $n$  on a

$$h_n \leq 2BK h_{n-1}^2$$

et on peut en déduire encore que

$$h_n \leq \frac{(2BK h_0)^{2^n}}{2BK}. \quad \square$$

Reçu le 6 juin 1967

*Institutul de Calcul, Cluj*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. W. Schmith, *Konvergenzgeschwindigkeit der im Banachraum*. ZAMM, 1966, 46, 2, 146-148.
- [2] S. ULM, *Obobşcenie metoda Steffensena dlja reşenija nelinejnâh operatornâh uravneij*. "Jur. vâcisl. mat. mat. fiziki", 1964, 4, 6, 1093-1097.
- [3] A. M. OSTROVSKI, *Reşenie uravnenij i sistema uravnenij*. "Mat. izd-vo in. lit.", 1963.
- [4] L. V. KANTOROVICI, *Funkcional'nâj analiz i prikladnaja matematika*. "UMN", 1948 (28), 3, 6.