

EVALUAREA ERORILOR ÎN REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE

DE

I. PĂVĂLOIU

(Cluj)

În această lucrare vom studia evaluarea erorilor care apar în rezolvarea aproximativă a ecuațiilor operaționale, atunci când rezolvarea acestora se face cu procedee iterative rapid convergente. Vom da o evaluare a erorilor în cauză folosind o delimitare a soluțiilor unor inegalități recurente neliniare. În lucrările [1], [2], [3], [4], [6] și [7] autorii au studiat această problemă pentru procedee iterative care au ordinul de convergență 1 și apoi au aplicat rezultatele găsite, la studiul erorilor procedeeelor cu ordin de convergență 2.

Considerăm ecuația

$$(1) \quad x - \varphi(x) = \theta$$

și pentru rezolvarea ei, procedeul iterativ

$$(2) \quad \varphi(x_n) = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x_0 \in X$$

unde φ este un operator definit pe spațiul X și cu valori în X . Peste tot, în cele ce urmează, vom presupune că procedeul iterativ (2) îndeplinește următoarele condiții:

a) Există cel puțin un element $\bar{x} \in X$ pentru care $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0$, unde $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este șirul generat de procedeul (2).

c) Operatorul φ admite derivate (în sens Fréchet) pînă la ordinul k inclusiv ($k \geq 2$ — număr natural), pentru care sînt îndeplinite condițiile:

$$\varphi^{(i)}(\bar{x}) = \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1; \quad \sup_{x \in S} \|\varphi^{(k)}(x)\| \leq M < +\infty,$$

unde $S = \{x \in X : \|x - \bar{x}\| \leq \|\bar{x} - x_0\|\}$ iar θ_i este operația nulă i -lineară.

Dacă notăm cu

$$\omega_n = \left(\frac{M}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \|x_n - \bar{x}\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

și presupunem că $\omega_0 < 1$, ținând cont de ipotezele a) și c) vom arăta că are loc egalitatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$$

adică șirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este convergent.

Într-adevăr, aplicând formula lui Taylor generalizată deducem inegalitățile

$$\omega_n \leq \omega_0^{k^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

de unde deducem egalitatea cerută.

Demonstrăm în prealabil următoarea leamnă :

LEMA 1. Dacă δ este un număr nenegativ, $(\rho_n)_{n=0}^{\infty}$ este un șir de numere nenegative care satisface relația de recurență

$$(3) \quad \rho_n \leq \rho_{n-1}^k + \delta, \quad k \geq 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(4) \quad \rho_0 < 1$$

iar $\bar{\alpha}$ este cea mai mică soluție pozitivă (în cazul când ea există) a ecuației

$$(5) \quad \alpha = (\alpha + \rho_0)^k - \rho_0^k + \delta$$

Atunci pentru orice $n = 1, 2, \dots$ au loc inegalitățile :

$$(6) \quad \rho_n \leq \rho_0^{k^n} + \bar{\alpha}.$$

Demonstrație. Vom demonstra inegalitățile (6) prin inducție. Pentru $n = 1$ obținem inegalitatea

$$\rho_1 \leq (\rho_0 + \bar{\alpha})^k + \delta$$

și dacă $\bar{\alpha}$ este soluție a ecuației (5), atunci evident are loc inegalitatea

$$\rho_1 \leq \rho_0^k + \bar{\alpha}$$

ceea ce demonstrează afirmația lemei pentru cazul $n = 1$. Din (4) și (5) deducem că pentru $n = 1, 2, \dots$ au loc inegalitățile

$$(7) \quad C_k^1 \cdot \rho_0^{k^{(k-1)}} \bar{\alpha} + \dots + C_k^{k-1} \rho_0^{k^2} \bar{\alpha}^{k-1} + \bar{\alpha}^k + \delta \leq \bar{\alpha}.$$

Presupunem prin inducție că are loc inegalitatea :

$$\rho_{n-1} \leq \rho_0^{k^{n-1}} + \bar{\alpha}$$

pe care înlocuind-o în (3) obținem

$$\rho_n \leq (\rho_0^{k^{n-1}} + \bar{\alpha})^k + \delta$$

de unde, dezvoltând după formula binomului lui Newton și ținând seamă de inegalitățile (7), deducem

$$\rho_n = \rho_0^{k^n} + \bar{\alpha}$$

ceea ce demonstrează afirmația lemei.

Pentru studiul erorilor vom considera alături de procedeul iterativ (2) următorul procedeu aproximativ,

$$(8) \quad \xi_n = \varphi^*(\xi_{n-1}), \quad \text{unde } \xi_0 = x_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

unde operatorul φ^* este definit pe spațiul X și cu valori în X .

TEOREMA 1. Fie dat un număr real negativ ε . Presupunem că relativ la ε există cel puțin un număr pozitiv M_1 astfel ca să fie îndeplinite condițiile :

a) Ecuația (5) unde

$$\rho_0 = \left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \|\bar{x} - x_0\|, \quad \delta = \varepsilon \left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

are cel puțin o soluție reală pozitivă.

b) Derivata Fréchet $\varphi^{(k)}$ verifică inegalitatea

$$\|\varphi^{(k)}(x)\| \leq M_1 < +\infty$$

pentru orice $x \in S'$ unde $S' = \left\{x \in X : \|x - \bar{x}\| \leq \|\bar{x} - x_0\| + \bar{\alpha} \left(\frac{k!}{M_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right\}$ iar $\bar{\alpha}$ este cea mai mică soluție pozitivă a ecuației (5).

c) Numărul M_1 și elementul x_0 sînt astfel încît are loc inegalitatea $\rho_0 < 1$.

d) Operatorul φ^* este astfel ales încît să fie verificată inegalitatea

$$\|\varphi(x) - \varphi^*(x)\| \leq \varepsilon, \quad \text{pentru orice } x \in S'.$$

În aceste condiții toate iterațiile succesive $(\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ aparțin sferei S' și are loc delimitarea

$$(9) \quad \|\bar{x} - \xi_n\| \leq \left(\frac{k!}{M_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot (\rho_0^k + \bar{\alpha}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Demonstrație. Într-adevăr, deoarece $\xi_0 = x_0 \in S'$ vom avea

$$\|\bar{x} - \xi_1\| \leq \|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\xi_0)\| + \|\varphi(\xi_0) - \varphi^*(\xi_0)\| \leq \frac{M_1}{k!} \|\bar{x} - \xi_0\|^k + \varepsilon$$

și notînd

$$\rho_1 = \left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \|\bar{x} - \xi_1\| \text{ și } \rho_0 = \left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \|\bar{x} - \xi_0\|,$$

deducem inegalitatea

$$\rho_1 \leq \rho_0^k + \delta.$$

Astfel condițiile lemei 1 sînt îndeplinite pentru ρ_0 și ρ_1 .

Fie $\bar{\alpha}$ cea mai mică soluție pozitivă a ecuației (5). Ținînd seama de lema 1 și de condiția c) avem

$$\rho_1 \leq \rho_0^k + \bar{\alpha}$$

de unde ușor deducem că $\xi_1 \in S'$.

Presupunem acum prin inducție că $\xi_{n-1} \in S'$ și demonstrăm că $\xi_n \in S'$. Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \xi_n\| &\leq \|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\xi_{n-1})\| + \|\varphi(\xi_{n-1}) - \varphi^*(\xi_{n-1})\| \leq \\ &\leq \frac{M_1}{k!} \|\bar{x} - \xi_{n-1}\|^k + \varepsilon, \end{aligned}$$

unde, notînd cu $\rho_n = \left(\frac{M_1}{k!}\right)^{\frac{1}{k-1}} \|\bar{x} - \xi_n\|$, $n = 2, 3, \dots$, avem

$$\rho_n \leq \rho_{n-1}^k + \delta.$$

Aplicînd lema 1 deducem inegalitatea (9) din care rezultă că $\xi_n \in S'$.

Observație. Se poate întîmpla ca în decursul calculelor, începînd cu un anumit pas N , să avem $\xi_N = \xi_{N+1} = \dots$. În acest caz pentru orice $n = N, N+1, \dots$ are loc inegalitatea

$$(10) \quad \|\xi_n - \bar{x}\| \leq \left(\frac{k!}{M_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \bar{\alpha}.$$

Exemplu. Fie $\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{0,2}{x}\right)$ care generează următorul procedeu iterativ

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{0,2}{x_{n-1}}\right), \quad x_0 \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

care se folosește la calculul rădăcinii pozitive a ecuației

$$x^2 - 0,2 = 0.$$

Presupunînd că $\varepsilon = 10^{-7}$ și $x_0 = 0,44$, găsim $\|\bar{x} - x_0\| \leq 0,01$, $M_1 = 4$, $\rho_0 = 0,02$, $\delta = 2 \cdot 10^{-7}$, $\bar{\alpha} \leq 3 \cdot 10^{-7}$. Iterațiile succesive și deci valorile funcției φ^* sînt date în tabel.

Tabel

Nr. crt.	ξ_n	$\varphi^*(\xi_n)$
0	0,44	0,44727272
1	0,44727272	0,44721359
2	0,44721359	0,44721359
3	0,44721359	—

Din tabel rezultă că $\xi_2 = \xi_3 = \dots = 0,44721359$, de unde, ținînd seama de observația de mai sus și de inegalitatea (10), obținem

$$|\sqrt{0,2} - 0,44721359| \leq 1,5 \cdot 10^{-7}.$$

Primită la redacție la 10 octombrie 1970.

Academia Republicii Socialiste
România—Filiata Cluj,
Institutul de calcul

L'ÉVALUATION DES ERREURS DANS LA SOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES

(RÉSUMÉ)

Dans l'ouvrage on donne une évaluation des erreurs pour le cas où une équation opérationnelle donnée est résolue avec la méthode itérative ayant un ordre de convergence k ($k \geq 2$). Ainsi on généralise les résultats des ouvrages [1], [2], [3], [4], [5] et [7].

BIBLIOGRAFIE

1. FUJII, M., *Remarks to Accelerated Iterative Processes for Numerical Solution of Equations*. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A—I, **27**, 97—118 (1963).
2. LANKASTER, P., *Error for the Newton — Raphson Method*. Numerische Mathematik, **9**, 1, 55—68 (1966).
3. OSTROWSKI, A.M., *The Round — off Stability of iterations*. Z.A.M.M., **47**, 77—81 (1967).
4. PĂVĂLOIU, I., *Asupra unor inegalități recurente și aplicații ale lor*, St. cerc. mat. **8**, **19**, 1175—1179 (1967).
5. — *Observații asupra rezolvării sistemelor de ecuații cu ajutorul procedeelor iterative*. Idem, **9**, **19**, 1289—1298 (1967).
6. URABE, M., *Convergence of Numerical Iteration of Equations*. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, **19**, 479—489 (1956).
7. — *Solution of Equations by Iteration Process*. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A—I, **26**, 77—91 (1962).