Mathematica - Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation.
L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation
Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 12, no. 1, 1983, pp. 83–88

SUR QUELQUES MÉTHODES ITÉRATIVES DE TYPE INTERPOLATOIRE À VITESSE DE CONVERGENCE OPTIMALE

par
I. PĂVĂLOIU et IOAN ŞERB
(Cluj-Napoca)

Dans cet article nous étudions une classe de méthodes iteŕatives pour la résolution des équations de la forme:

$$f\,(x) = 0, \tag{1}$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle d'une variable réelle et I est un invervalle de l'axe réel.

Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1},\ n+1$ points distincts de l'intervalle I et par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1},\ n+1$ nombres naturels tels que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1} = m + 1, \tag{2}$$

où $m \in \mathbb{N}$.

Il est bien connu que quels que soiient les nombres $y_i^j,\ j = 0,\ 1, \ldots, \alpha_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n+1$, il existe un seul polynôme H_1 de degré au plus m qui vérifie les conditions:

$$H_1^{(j)}\,(x_i) = y_i^j,\ j = 0, 1, \ldots, \alpha_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{3}$$

Le polynôme H_1 déterminé par les conditions (3) a la forme:

$$H_1\,(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} y_i^j \tfrac{1}{k!j!} \left[\tfrac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right]_{x=x_i}^{(k)} \tfrac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i - j - k}}, \tag{4}$$

où

$$\omega\,(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)^{\alpha_i}\,. \tag{5}$$

Si on suppose que la fonction f admet une dérivée d'ordre $m+1$ sur l'intervalle I et si $y_i^j = f^{(j)}(x_i)$, $j = 0,1,\ldots,\alpha_i - 1$, $i = 1,2,\ldots,n+1$, alors H_1, le polynôme d'Hermite de la fonction f, relativement aux noeuds x_i, aux ordres de mutiplicité α_i, vérifie l'égalité:

$$f(x) - H_1(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\omega(x), \tag{6}$$

où $\xi \in I$.

Dans ce qui suit on suppose que $f'(x) \neq 0$ quelque soit $x \in I$ et on désigne par $F = f(I)$. Il résulte que $f : I \to F$ est une fonction bijective et il existe $f^{-1} : F \to I$. La fonction inverse f^{-1} admet une dérivée d'ordre $m+1$, pour tout $x \in F$.

La dérivée d'ordre $k, k \leq m+1$ sur un point $y_0 = f(x_0)$, $y_0 \in F$ peut se calculer par la formule:

$$\left(f^{-1}\right)^{(k)}(y_0) = \sum \frac{(2k-i_1-2)!(1-)^{k+i_1-1}}{i_2!\ldots i_k!(f'(x_0))^{2k-1}}\left(\frac{f'(x_0)}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{f''(x_0)}{2!}\right)^{i_2}\ldots\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right)^{i_k}, \tag{7}$$

où la somme ci-dessus est étendue à toutes les solutions entières et nonnégatives du système:

$$\begin{cases} i_2 + 2i_3 + \ldots + (k-1)\,i_k = k-1 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k = k-1. \end{cases} \tag{8}$$

Si on suppose que l'équation (1) a une racine dans l'intervalle I, cette racine est unique parce que $f'(x) \neq 0$ quel que soit $x \in I$ et nous la désignerons par $\bar{x}$. Alors de $f(\bar{x}) = 0$ il résulte que $\bar{x} = f^{-1}(0)$.

Dans ce qui suit, dans l'expression du polynôme d'interpolation donnée par (4) on prendra comme noeuds d'interpolation les valeurs $y_i = f(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,n+1$ et comme valeurs y_i^j les valeurs des dérivées $\left(f^{-1}\right)^{(j)}(y_i)$, $i = 1,2,\ldots,n=1$, $j = 0,1,\ldots,\alpha_i - 1$. Par conséquent on obtient le polynôme d'interpolation d'Hermite pour la fonction inverse f^{-1}. Ce polynôme a alors la forme suivante:

$$H(y) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1}\left(f^{-1}\right)^{(j)}(y_i)\,\frac{1}{k!j!}\left[\frac{(y-y_i)^{\alpha_i}}{\omega(y)}\right]^{(k)}_{y=y_i}\frac{\omega(y)}{(y-y_i)^{\alpha_i-j-k}}, \tag{9}$$

où

$$\omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1}(y-y_i)^{\alpha_i}. \tag{10}$$

De (6) il résulte l'égalité

$$f^{-1}(y) - H(y) = \frac{\left(f^{-1}\right)^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!}\omega(y),$$

où $\eta \in F$.

Si $y=0$, alors $\bar{x}=f^{-1}(0)$ et

$$\bar{x}-H(0)=\frac{\left(f^{-1}\right)^{(m+1)}(\eta_1)}{(m+1)!}\omega(0), \tag{11}$$

où $\eta_1 est$ un point du plus petit intervalle contenant les points:

$$0, f(x_1), \dots, f(x_{n+1}).$$

Si on désigne par F_1 cet intervalle et par

$$M_{m+1}=\sup_{y\in F_1}\left|\left(f^{-1}\right)^{(m+1)}(y)\right|,$$

alors

$$|\bar{x}-H(0)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|\omega(0)|.$$

De (10) et du fait que $y_i=f(x_i),\ i=1,2,\dots,n+1$ on déduit

$$|\bar{x}-H(0)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|f(x_1)|^{\alpha_1}\cdot|f(x_2)|^{\alpha_2}\dots|f(x_{n+1})|^{\alpha_{n+1}}. \tag{12}$$

De l'inégalité (12) il résulte que si $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ sont dans un voisinage suffisamment petit de $\bar{x}$, alors $\prod_{i=1}^{n+1}|f(x_i)|^{\alpha_i}$ se trouvera dans un voisinage donné d'avance de 0. En conséquence, nous pouvons supposer que $H(0)$ est un approximant de la racine $\bar{x}$ de l'équation (1).

Si $|\bar{x}-H(0)|$ n'est pas suffisamment petit, alors, par des itérations successives on peut obtenir des approximations meilleures. Désignons par $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, $n+1$ approximations initiales de la racine $\bar{x}$ de (1). Soit $x_{n+2}=H(0)=H(y_1,\alpha_1;\dots;y_{n+1},\alpha_{n+1};0)$, où $H(y_1,\alpha_1;y_2,\alpha_2;\dots;y_{n+1},\alpha_{n+1};y)$ est le polynôme d'interpolation d'Hermite (9) de la fonction f^{-1} relatif aux noeuds $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ aux ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ et $y_i=f(x_i),\ i=1,2,\dots,n+1$. Si nous considérons maintenant le nouveau système de noeuds $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}$ an obtient une nouvelle approximation $x_{n+3}=H(y_2,\alpha_1;y_3,\alpha_2;\dots;y_{n+2},\alpha_{n+1};0)$ et ainsi de suite.

Mais, si nous rangeons les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ dans l'ordre $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}$ on obtient une nouvelle suite d'approximations de $\bar{x}$, donnée par les formules

(13)

$$\begin{cases} x_{n+2}=H\left(y_{i_1},\alpha_{i_1};y_{i_2},\alpha_{i_2};\dots;y_{i_{n+1}};\alpha_{i_{n+1}};0\right)=H(0) \\ x_{n+s+2}=H\left(y_{i_{s+1}},\alpha_{i_1};\dots;y_{i_{n+1}},\alpha_{{n+1-s}};y_{n+2},\alpha_{i_{n+2-s}};\dots;y_{n+s+1},\alpha_{i_{n+1}};0\right), \\ \qquad s=1,2,\dots,n, \\ x_{n+s+2}=H\left(y_{s+1},\alpha_{i_1};y_{s+2},\alpha_{i_2};\dots;y_{n+s+1},\alpha_{i_{n+1}};0\right),\ s=n+1,n+2,\dots \end{cases}$$

où $y_i=f(x_i),\ i=1,2,\dots$

Pour chaque permutation des nombres $1, 2, \ldots, n+1$ on obtient une suite d'approximations de $\bar{x}$ donnée par (13). En tout, il y a $(n+1)!$ suites d'approximations de $\bar{x}$.

On pose la question de choisir parmi ces $(n+1)!$ suites, celle qui assure la vitesse de convergence maximale.

Pour résoudre ce problème, on considère les équations suivantes

$$P(t) = t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \ldots - a_2 t - a_1 = 0, \tag{14}$$

$$Q(t) = t^{n+1} - a_1 t^n - a_2 t^{n-1} - \ldots - a_n t - a_{n+1} = 0, \tag{15}$$

$$R(t) = t^{n+1} - a_{i_1} t^n - \ldots - a_{i_n} t - a_{i_{n+1}} = 0, \tag{16}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in R$ vérifient les relations

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} > 1,\ a_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{17}$$

$$a_{n+1} \geq a_n \geq \ldots \geq a_2 \geq a_1, \tag{18}$$

et $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ est une permutation quelconque de $1, 2, \ldots, n+1$.

Lemme 1. *Si* $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ *vérifient la relation* (17), *alors chaque équation de la forme* (16) *a une seule racine plus grande que l'unité. Si, de plus,* $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ *vérifient la condition* (18) *et si* a, b, c *sont respectivement les racine positives des équaitons* (14), (15) *ou* (16), *alors on a les inégalités*

$$1 < b \leq c \leq a \tag{19}$$

Démonstration. On désigne par s le plus grand nombre pour lequel $a_{i_s} \neq 0$. Alors $a_{i_{s+1}} = a_{i_{s+2}} = \ldots = a_{i_n} = a_{i_{n+1}} = 0,\ a_{i_s} \neq 0$. Désignons par ψ la fonction définie par $\psi(t) = R(t)/t^{n-s+1}$. On a $\psi(1) = 1 - a_{i_1} - \ldots - a_{i_s} < 0$ et $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$, donc l'équation $\psi(t) = 0$ admet une racine plus grande que l'unité. Alors, l'équation $R(t) = 0$ a une racine plus grande que 1. L'unicité de cette racine résulte immédiatement en considérant la fonction $f(t) = -t^{n+1} R(1\backslash t)$ qui vérifie la condition $f'(t) > 0$ pour $t > 0$.

Pour prouver les inégalites (19) il suffit de montrer que $R(b) \leq 0$ et $R(a) \geq 0$. En effet

$$\begin{aligned}
R(b) =& R(b) - Q(b) \\
&= (a_1 - a_{i_1}) b^n + (a_2 - a_{i_2}) b^{n-1} + \ldots + (a_n - a_{i_n}) b + a_{n+1} - a_{i_{n+1}} \\
&= (b-1) \big[(a_1 - a_{i_1}) b^{n-1} + (a_1 + a_2 - a_{i_1} - a_{i_2}) b^{n-2} + \ldots \\
&\quad + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - a_{i_1} - a_{i_2} - \ldots - a_{i_{n-1}}) b \\
&\quad + a_1 + \ldots + a_n - a_{i_1} - a_{i_2} - \ldots - a_{i_n} \big] \leq 0
\end{aligned}$$

parce que $b > 1$ et de (18) il résulte

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_s - a_{i_1} - a_{i_2} - \ldots - a_{i_s} \leq 0, \qquad \text{pour } s = 1, 2, \ldots, n.$$

De manière analogue on montre que $R(a) \geq 0$.

Soit maintenant $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n+1$, pour laquelle les nombres naturels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ qui vérifient la relation (2) peuvent se ranger en ordre croissant

$$\alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \ldots \leq \alpha_{i_n} \leq \alpha_{i_{n+1}}. \tag{20}$$

Le suite correspondante des noeuds est $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ et la suite correspondante des approximations successive de $\bar{x}$ est donnée par (13). Si nous désignons par

$$a_s = \alpha_{i_s}, s = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{21}$$

et par

$$u_s = x_{i_s}, s = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{22}$$

alors la suite d'approximations (13) devient $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ où

$$x_{n+s+2} = H(y_{s+1}, a_1; y_{s+2}, a_2; \ldots; y_{s+n+1}, a_{n+1}; 0), \tag{23}$$

$s = 0, 1, \ldots$,où $y_i = f(u_i), \ i = 1, 2, \ldots$.

L'inégalité (12) devient

$$|\bar{x} - H(0)| = |\bar{x} - u_{n+2}| \leq \tfrac{M}{(m+1)!} |f(u_1)|^{a_1} \ldots |f(u_{n+1})|^{a_{n+1}}, \tag{24}$$

où $M = \sup\limits_{y \in F} \left| \left(f^{-1}\right)^{(m+1)}(y) \right|$. Si nous désignons par $\beta = \sup\limits_{x \in I} |f'(x)|$ alors de (23) et (24) on obtient

$$|\bar{x} - u_{n+2}| \leq \tfrac{M\beta^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - u_1|^{a_1} \ldots |\bar{x} - u_{n+1}|^{a_{n+1}}. \tag{25}$$

En général, is les éléments de la suite $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ sont dans l'intervalle I, alors

$$|\bar{x} - u_{n+s+1}| \leq \tfrac{M\beta^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - u_s|^{a_1} \ldots |\bar{x} - u_{s+n}|^{a_{n+1}} \tag{26}$$

$s = 1, 2, \ldots$. Si nous écrivons $\rho_i = \beta \sqrt{\tfrac{\beta M}{(m+1)!}} |\bar{x} - u_i|, i = 1, 2, \ldots$, alors de (26) on obtient

$$\rho_{n+s+1} \leq \rho_{n+s}^{a_{n+1}} \rho_{n+s-1}^{a_n} \cdots \rho_{s+1}^{a_2} \rho_s^{a_1}, \tag{27}$$

$s = 1, 2, \ldots$.

Nous supposons maintenant qu'il existe un nombre $d, 0 < d < 1$ tel que

$$\rho_i \leq d^{\omega^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{28}$$

où ω est l'unique racine positive de l'équation

$$t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \ldots - a_2 t - a_1 = 0. \tag{29}$$

Si on suppose que pour un s fixé $s \geq 2$ nous avons

$$\rho_{n+s} \leq d^{x+s}, \tag{30}$$

alors de (27), (28) et (29) il résulte immédiatement que

$$\begin{aligned}\rho_{n+s+1} &\leq d^{a_{n+1}\omega^{n+s}} \cdot d^{a_n \omega^{n+s-1}} \ldots d^{a_2\omega^{s+1}} \cdot d^{a_1\omega^s} \\ &= d^{a_{n+1}\omega^{n+s}+a_n\omega^{n+s-1}+\ldots+a_2\omega^{s+1}+a_1\omega^s} = d^{\omega^{n+s+1}},\end{aligned} \tag{31}$$

et par induction il résulte que

$$\rho_n \leq d^{\omega^n}, n = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

La solution ω de l'équation (29) s'appelle l'ordre de convergence de la méthode itérative (23). On a

$$|\bar{x} - u_n| \leq \frac{1}{\beta \sqrt[m]{\frac{M\beta}{(m+1)!}}} d^{\omega^n}, n = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

d'où il résulte que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \bar{x}$. □

On remarque que l'ordre de convergence des méthodes (13) dépend de la racine positive ω de l'equation (29).

En tenant compte du lemme et des considérations ci-dessus on obtient le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit* $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ *une permutation de* $1, 2, \ldots, n+1$ *et* $M(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ *la méthode itérative* (13) *correspondante. Si* $\alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \ldots \leq \alpha_{i_{n+1}}$ *où* α_{i_j} *est l'ordre de multiplicité du noeud* $y_{i_j} = f\left(x_{i_j}\right)$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, *alors dans les conditions* (20) *méthode* (23) *assure l'ordre de convergence* ω *maximal, parmi les* $(n+1)!$ *méthodes itératives de la forme* (13).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ostrowski, M. A., *Solution of Equations and Systems of Equations,* Academic Press, New-York and London, 1960.

available soon, refresh and click here →

[2] Păvăloiu, I., *Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare*, Ed. Dacia, 1981.

clickable →

[3] Păvăloiu, I., Iancu, C., *La résolution des équations par interpolation inverse de type Hermite*, Seminar of functional analysis and Numerical methods, "Babeş-Bolyai" University, Research Seminaries, Preprint Nr. 4, (1981), 72–84.
republished in: Mathematica (Cluj), 26(49) (1984), no. 2, pp. 115–123.

Recu le 5.III.1983

Institutul de Calcul al Universităţii Babeş-Bolyai
Str. Republicii 37
3400 Cluj-Napoca