Mathematica - Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation
Mathematica, vol. 26(49), 1984, no. 2, pp. 115–123

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PAR INTERPOLATION INVERSE DE TYPE HERMITE

par
C. IANCU et I. PĂVĂLOIU

1.

Dans ce travail nous étudions quelques méthodes numériques pour la résolution des équations de la forme:

$$f(x) = 0, \tag{1.1}$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle d'une variable réelle, et I est un intervalle de l'axe réel.

Nous désignons par E un ensemble de $n+1$ nombres réels distincts de l'ensemble I, c'est-à-dire, $E = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ où $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j,\ i,j = 1,2,\dots,n+1$.

Désignons par

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \tag{1.2}$$

$n+1$ nombers naturels qui vérifient la condition:

$$\alpha_1 + \alpha_2 +, \dots + \alpha_{n+1} = m+1 \tag{1.3}$$

où $m \in \mathbb{N}$, et par

$$y_i^j;\ \ j = 0,1,\dots,\alpha_i - 1;\ i = 1,2,\dots,n+1, \tag{1.4}$$

$m+1$ nombres réels donnés.

La théorème suivant est bien connu.

Théorème 1. *Il y a un seul polynôme P de degré au moins m, qui verifie les conditions suivantes:*

$$P^{(j)}(x_i) = y_i^j, \quad j = 0,1,\dots,\alpha_i - 1;\ i = 1,2,\dots,n+1; \tag{1.5}$$

Le polynôme P a la forme suivante:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} y_i^j \tfrac{1}{k!j!} \left[\tfrac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right]_{x=x_i}^{(k)} \cdot \tfrac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i - j - k}}, \tag{1.6}$$

où

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)^{\alpha_i} \tag{1.7}$$

Si nous supposons que la fonction f admet des dérivées jusqu'à l'ordre $m+1$ inclusivement dans l'intervalle I et si $y_i^j = f^{(j)}(x_i)$, $j = 0, 1, \ldots, \alpha_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, alors, le reste de la formule d'interpolation de Hermite satisfait à l'ègalité suivante:

$$f(x) - P(x) = \tfrac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \cdot \omega(x), \tag{1.8}$$

où $\xi \in I$.

Supposons que $f'(x) \neq 0$, pour chaque $x \in I$ et désignons par $F = f(I)$, l'image de l'intervalle I par la fonction f. De l'hypothèse ci-dessus il résulte que la fonction $f : I \to F$ est bijective, que la fonction $f^{-1} : F \to I$ admet des dérivées juqu'à l'ordre $m+1$ inclusivement dans l'intervalle F. La dérivée d'ordre k ($k \in \mathbb{N},\ k \leq m+1$) en un point $y_0 = f(x_0)$, $y_0 \in F$ a la forme suivante [4], [8]:

(1.9)

$$\left[f^{-1}(y_0)\right]^{(k)} = \sum \tfrac{(2k-2-i_1)!(-1)^{k-1+i_1}}{i_2!\ldots i_k!(f'(x_0))^{2k-1}} \left(\tfrac{f'(x_0)}{1!}\right)^{i_1} \left(\tfrac{f''(x_0)}{2!}\right)^{i} \cdots \left(\tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right)^{i_k}$$

où la somme ci-dessus s'étend à toutes les solutions entières et non négatives du système d'équations:

$$\begin{cases} i_2 + 2i_3 + \ldots + (k-1)\, i_k = k-1 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k = k-1 \end{cases} \tag{1.10}$$

Si nous supposons que l'équation (1.1) admet une racine $\bar{x} \in I$, alors de $f(\bar{x}) = 0$ il résulte que $f^{-1}(0) = \bar{x}$, et de $f'(x) \neq 0$ pour chaque $x \in I$ il résulte que $\bar{x}$ est unique.

Si dans l'expression du polynôme d'interpolation de Hermite (1.6) nous choisissons pour les noeuds d'interpolation les valeurs $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ et pour les valeurs de la fonction et de ses dérivées les nombres $f^{-1}(y_i) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, respectivement $\left[f^{-1}(y_i)\right]^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, \alpha_i - 1$; $i = 1, 2, \ldots, n+1$, alors nous obtenons le polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f^{-1}. Ce polynôme aura la forme suivante:

(1.11)

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} \left[\left(f^{-1}(y_i)\right)\right]^{(j)} \tfrac{1}{k!j!} \cdot \left[\tfrac{(y-y_i)^{\alpha_i}}{\omega(y)}\right]^{(k)}_{y=y_i} \cdot \tfrac{\omega(y)}{(y-y_i)^{\alpha_i - 1 - k}}$$

où

$$\omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i)^{\alpha_i}. \tag{1.12}$$

Le polynôme défini par la relation (1.11) s'appelle le polynôme d'interpolation inverse d'Hermite.

De l'égalité (1.8) il résulte:

$$f^{-1}(y) - P(y) = \frac{\left[f^{-1}(\eta)\right]^{(m+1)}}{(m+1)!} \cdot \omega(y), \quad \eta \in F. \tag{1.13}$$

En tenant compte que $f^{-1}(0) = \bar{x}$, (1.13) nous donne

$$\bar{x} - P(0) = \frac{\left[f^{-1}(\eta_1)\right]^{(m+1)}}{(m+1)!} \cdot \omega(0) \tag{1.14}$$

où η_1 est contenu dans le plus petit intervalle qui contient les points: $0, f(x_1), \ldots, f(x_{n+1})$. Si nous désignons par F_1 l'intervalle ci-dessus et par M_{m+1} le nombre $M_{m+1} = \sup_{y \in F_1} \left| \left[f^{-1}(y)\right]^{(m+1)} \right|$ alors nous déduisons de (1.14)

$$|\bar{x} - P(0)| \leq \tfrac{M_{m+1}}{(m+1)!} |f(x_1)|^{\alpha_1} \cdot |f(x_2)| \ldots |f(x_{n+1})|^{\alpha_{n+1}}. \tag{1.15}$$

Si les points de l'ensemble E sont suffisamment proches de $\bar{x}$, alors les nombres $f(x_1),\ f(x_2), \ldots, f(x_{n+1})$ sont proches de zéro. A plus forte raison le nombre $\prod_{i=1}^{n+1} |f(x_i)|^{\alpha_i}$ est proche de zéro et le choix de $P(0)$ comme approximation pour la racine $\bar{x}$ de l'équation (1.1) est justifié. Par conséquent

$$\bar{x} \simeq P(0). \tag{1.16}$$

2. *Méthodes itératives obtenues à l'aide du polynôme d'interpolation inverse d'Hermite*

Si l'approximation $P(0)$ de $\bar{x}$ donnée par (1.16) n'est pas convenable, alors par des itérations successives on peut obtenir dans certains cas des approximations de plus en plus proches de la racine.

Désignons par

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \tag{2.1}$$

$n+1$ approximations initiales de la racine $\bar{x}$ de l'équation (1.1). A l'aide de ces approximations nous construisons la suite $(x_p)_{p=1}^{\infty}$ donnée par le procédé itératif suivant:

$$x_{n+s+1} = P_{n+s}(0), \tag{2.2}$$

où $P_{n+1}(0) = P(0)$, P a l'expression donée par (1.11) et P_{n+s} a l'expression suivante:
(2.3)

$$P_{n+s}(y) = \\ = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} \left(f^{-1}(y_{s+i-1})\right)^{(j)} \tfrac{1}{k! j!} \left[\tfrac{(y - y_{s+i-1})}{\omega_s(y)} \right]^{(k)}_{y = y_{s+i+1}} \tfrac{\omega_s(y)}{(y - y_{s+i-1})^{\alpha_i - j - k}}$$

ou

$$\omega_s(y) = \prod_{i=0}^{n} (y - y_{s+i})^{\alpha_i + 1}. \tag{2.4}$$

Dans ce qui suit nous étudions la convergence de la suite $(x_p)_{p=1}^{\infty}$ générée par le procédé itératif (2.2). Nous désignons par

$$M = \sup_{y \in F} \left| \left[\left(f^{-1}(y) \right) \right]^{(m+1)} \right| \quad \text{et } \beta = \sup_{x \in I} \left| f'(x) \right|,$$

alors de (1.14) et (2.2) il resulte:

$$|\bar{x} - x_{n+2}| \leq \tfrac{M \beta^{m+1}}{(m+1)!} \cdot |\bar{x} - x_1|^{\alpha_1} \ldots |\bar{x} - x_{n+1}|^{\alpha_{n+1}}. \tag{2.5}$$

Plus généralement si les éléments de la suite $(x_p)_{p=1}^{\infty}$ sont contenus dans l'intervalle I, on a les inéqualitiés suivantes:

$$|\bar{x} - x_{n+s+1}| \leq \tfrac{M \beta^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - x_s|^{\alpha_1} \cdot |\bar{x} - x_{s+1}|^{\alpha_2} \ldots |x - x_{s+n}|^{\alpha_{n+1}} \\ s = 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{2.6}$$

En multipliant les termes de (2.6) par $\beta \sqrt[m]{\frac{\beta M}{(m+1)!}}$ et on désignant par ρ_i le nombre

$$\rho_i = \beta \sqrt[m]{\tfrac{\beta M}{(m+1)!}} \cdot |\bar{x} - x_i|, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

les inégalités (2.6) deviennent:

$$\rho_{n+s+1} \leq \rho_{n+s}^{\alpha_{n+1}} \rho_{n+s-1}^{\alpha_n} \cdots \rho_{s+1}^{\alpha_2} \rho_s^{\alpha_1}, \quad s = 1, 2, \ldots\ . \tag{2.7}$$

Nous supposons dans ce qui suit:

$$\rho_i \leq d^{\omega^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{2.8}$$

où ω est la racine positive de l'équation

$$t^{n+1} = \alpha_{n+1} t^n + \alpha_n t^{n-1} + \cdots + \alpha_2 t + \alpha_1, \tag{2.9}$$

et $0 < d < 1$.

Si nous supposons

$$\rho_{n+s+1} \leq d^{u_{n+s+1}}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{2.10}$$

alors en tenant compte de (2.7) et (2.9) on a

$$u_{n+s+1} = \alpha_{n+1} u_{n+s} + \alpha_n u_{n+s-1} + \cdots + \alpha_2 u_{s+1} + \alpha_1 u_s \tag{2.11}$$

Il résulte de (2.8) que

$$u_i = \omega^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{2.12}$$

Il est facile de montrer que l'équation (2.9) a une racine unique réelle et positive $\omega > 1$. Alors de (2.11), (2.10), (2.12) et tenant compte que ω est la racine de l'equation (2.9) nous déduisons les égalités suivantes:

$$u_{n+s+1} = \omega^{n+s+1}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.13}$$

c'est-à-dire

$$\rho_{n+s+1} \leq d^{\omega^{n+s+1}}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.14}$$

De l'égalité (1.3) il résulte que $\omega > 1$ et $\lim\limits_{s\to\infty} \rho_{n+s+1} = 0$. Par conséquent

$$\lim_{s\to\infty} |\bar{x} - x_{n+s+1}| = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'expression de ρ_{n+s+1} fournit l'évaluation suivante:

$$|\bar{x} - x_{n+s+1}| \leq \frac{1}{\beta \sqrt[m]{\frac{\beta M}{(m+1)!}}} \cdot d^{\omega^{n+s+1}} \tag{2.15}$$

3. *Le cas particulier* $n = 1$.

Désignons par a_1, a_2 deux nombres de N tels que $a_1 + a_2 = m + 1$, et par x_1, x_2 deux points de l'intervalle I. Supposons que dans chaque point $x_i,\ i = 1, 2$ nous connaissons les valeurs de la fonction f et de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $a_1 - 1,\ a_2 - 1$ respectivement.

A l'aide de la formule (1.9) on peut calculer les valeurs de la fonction f^{-1} dans les points $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$ et les valeurs de ces dérivées successives jusqu'à l'ordre $a_1 - 1,\ a_2 - 1$ respectivement.

Le polynôme d'interpolation inverse d'Hermite sur les noeuds $y_1,\ y_2$ aura la forme suivante:

(3.1)

$$P(y) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{a_i-1} \sum_{k=0}^{a_i-j-1} \left(f^{-1}(y_i)\right)^{(j)} \cdot \frac{1}{k!j!} \cdot \left[\frac{(y-y_i)^{\alpha_i}}{\omega(y)}\right]_{y=y_i}^{(k)} \cdot \frac{\omega(y)}{(y-y_i)^{a_i-j-k}},$$

où

$$\omega(y) = (y - y_1)^{a_1} \cdot (y - y_2)^{a_2}. \tag{3.2}$$

En prenant en (3.1) $y=0$ on obtient une première approximation de la racine $\bar{x}$ de l'équation (1.1). Si nous désignons par x_3 cette approximation alors on a:

(3.3)

$$\bar{x} \approx x_3 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{a_i-1} \sum_{k=0}^{a_i-j-1} \left(f^{-1}\left(y_i\right)\right)^{(j)} \cdot \tfrac{1}{k!j!} \cdot \left[\tfrac{(y-y_i)^{a_i}}{\omega(y)}\right]^{(k)}_{y-y_i} \cdot \tfrac{(-1)^{a_i-j-k} \cdot \omega(0)}{y_i^{a_i-j-k}}$$

.

De (3.3) et (1.14) on déduit

$$|\bar{x}-x_3| \le M\left|f\left(x_1\right)\right|^{a_1} \cdot \left|f\left(x_2\right)\right|^{a_2}, \quad M = \sup_{\eta \in f(I)} \tfrac{\left|\left(f^{-1}(\eta)\right)^{(m+1)}\right|}{(m+1)!} \tag{3.4}$$

En utilisant l'égalité

$$|\bar{x}-x_3| = \tfrac{|f(x_3)|}{|[\bar{x},x_3;f]|}, \tag{3.5}$$

où par $[\bar{x},x_3;f]$ nous désignons la différence divisée de la fonction f sur les noeuds $\bar{x},\ x_3$; on déduit de (3.4) l'inégalité suivante:

$$\left|f\left(x_3\right)\right| \le K\left|f\left(x_1\right)\right|^{a_1} \cdot \left|f\left(x_2\right)\right|^{a_2} \tag{3.6}$$

où $K \ge \left|M \cdot [x,y;f]\right|,\ x,y \in I.$

Si nous considerons les nombres x_1 et x_2 comme des approximations intiales pour la racine $\bar{x}$ de l'équation (1.1), nous obtenons de (2.3) pour $y=0$ une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, avec

(3.7)

$$x_{s+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{a_i-1} \sum_{k=0}^{a_i-j-1} \left(f^{-1}\left(y_{s+i-1}\right)\right)^{(j)} \tfrac{1}{k!j!} \left[\tfrac{(y-y_{s+i-1})^{a_i}}{\omega_s(y)}\right]^{(k)}_{y=y_{s+i-1}} \tfrac{(-1)^{a_i-j-k}\omega_s(0)}{y_{s+i-1}^{a_i-j-k}}$$

$$\omega_s\left(y\right) = \left(y-y_{s-1}\right)^{a_1} \cdot \left(y-y_s\right)^{a_2}, \quad s=2,3,\ldots \tag{3.8}$$

Dans l'hypothèse selon laquelle touts les éléments de la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sont contenus dans l'intervalle I, on a les inégalités suivantes:

$$\left|f\left(x_{n+2}\right)\right| \le K\left|f\left(x_n\right)\right|^{a_1} \cdot \left|f\left(x_{n+1}\right)\right|^{a_2}, \quad n=1,2,\ldots \tag{3.9}$$

Si nous multiplions les inégalités (3.9) par $K^{\frac{1}{m}}$ et si nous tenons compte que $a_1+a_2=m+1$ nous obtenons:

(3.10)

$$K^{\frac{1}{m}}\left|f\left(x_{n+2}\right)\right| \le \left[K^{\frac{1}{m}}\left|f\left(x_n\right)\right|\right]^{a_1} \cdot \left[K^{\frac{1}{m}}\left|f\left(x_{n+1}\right)\right|\right]^{a_2}, \quad n=1,2,\ldots$$

Dans ce qui suit nous désignons par ρ_i les nombres

$$\rho_i = K^{\frac{1}{m}} \left| f\left(x_i\right) \right|, \quad i = 1, 2, \dots \tag{3.11}$$

Alors les inégalités (3.10) deviennent:

$$\rho_{n+2} \leq \rho_n^{a_1} \cdot \rho_{n+1}^{a_2}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.12}$$

Nous supposerons que

$$\begin{cases} \rho_1 \leq d^{\omega_1} \\ \rho_2 \leq d^{\omega_2} \end{cases} \tag{3.13}$$

où $0 < d < 1$ et ω_1 est la racine positive de l'équation

$$t^2 - a_2 t - a_1 = 0. \tag{3.14}$$

De (3.12) on déduit:

$$\rho_n \leq d^{u_n} \tag{3.15}$$

où la suite $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ vérifie les égalités

$$u_{n+2} = a_2 u_{n+1} + a_1 u_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.16}$$
$$u_1 = \omega_1, u_2 = \omega_1^2.$$

De (3.14) on déduit:

$$\omega_1 = \tfrac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4a_1}}{2} \tag{3.17}$$

auquel cas (3.16) donne

$$u_n = \omega_1^n, \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{3.18}$$

En déduit pour ρ_n les évaluations suivantes:

$$\rho_n \leq d^{\omega_1^n}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.19}$$

L'inégalité précedente et (3.11) impliquent:

$$\left| f\left(x_n\right) \right| \leq K^{-\frac{1}{m}} \cdot d^{\omega_1^n}. \tag{3.20}$$

En désignant par α le nombre

$$\alpha = \inf_{x, y \in [x_1, x_2]} \left| [x, y; f] \right| \tag{3.21}$$

et en supposant $\alpha > 0$, on déduit de (3.20)

$$\left| \bar{x} - x_n \right| \leq \tfrac{1}{\alpha} \left| f\left(x_n\right) \right| \leq \tfrac{1}{\alpha} K^{-\frac{1}{m}} \cdot d^{\omega_1^n}, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.22}$$

ce qui représente une évaluation de l'ereur apres $n - 2$ pas d'iteration.

En passant à limite lorsque $n \to \infty$ on déduit de (3.22)

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} x_n \tag{3.23}$$

et de (3.20) il résulte, du fait que f est une fonction continue, $f\left(x\right) = 0$.

Dans ce qui suit nous allons présenter une analyse de la vitesse de convergence de la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ donnée par (3.7). Pour ce faire nous remarquons que si nous considérons dans le polynôme d'interpolation d'Hermite le noeud x_1 ayant l'ordre de multiplicité a_2, et le noeud x_2 ayant l'ordre de multiplicité a_1, l'équation qui nous donne la vitesse de convergence de la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (3.14) prendra la forme:

$$t^2 - a_1 t - a_2 = 0. \tag{3.24}$$

On peut facilement démontrer que, si $a_1 \le a_2 et$ si ω_2 est la racine positive de l'équation (3.24), alors:

$$\omega_2 \le \omega_1. \tag{3.25}$$

Des considérations ci-dessus nous concluons qu'on obtient l'ordre de convergence maximal quand dans l'interpolation invérse de type Hermite à deux noeuds, l'ordre de multiplicité de x_1 est au moins égal à l'ordre de multiplicité de x_2. Il va de soi que dans la conclusion ci-dessus nous avons supposé que les éléments de la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sont obtenus à l'aide de la relation (3.7).

Dans ce qui suit nous présentons deux cas particuliers du polynôme d'interpolation invèrse d'Hermite et les méthodes itératives rattachées.

1. $a_1 = a_2 = 1$.

Dans ce cas le polynôme d'interpolation inverse d'Hermite a la forme suivante:

$$P_1(y) = \tfrac{1}{y_1 - y_2}\left[(y-y_2) f^{-1}(y_1) - (y-y_1) f^{-1}(y_2)\right]. \tag{3.26}$$

En tenant compte que $f^{-1}(y_1) = x_1$ et $f^{-1}(y_2) = x_2$ et en faisant dans (3.26) $y = 0$ nous obtenons la premiére approximation de $\bar{x}$ donnée par la relation:

$$x_3 = x_1 - \tfrac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1). \tag{3.27}$$

En procédant de proche en proche nous obtenons la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ donnée par la relation:

$$x_{n+2} = x_n - \tfrac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} \cdot f(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.28}$$

qui représente la méthode de la corde. En ce cas la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a l'ordre de convergence $\omega_1 = (1+\sqrt{5})/2$.

2. $a_1 = 1,\ a_2 = 2$. [2].

Le polynôme d'interpolation inverse d'Hermite prend dans ce cas la forme suivante:

$$P_2(y) = \left(f^{-1}(y_2)\right)' \cdot \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{y_2-y_1} + \tag{3.29}$$
$$+ f^{-1}(y_2) \frac{y-y_1}{y_2-y_1}\left(1+\frac{y-y_2}{y_1-y_2}\right) + f^{-1}(y_1) \cdot \frac{(y-y_2)^2}{(y_1-y_2)^2}.$$

En tenant compte des égalités $f^{-1}(y_1) = x_1,\ f^{-1}(y_2) = x_2$ et $\left(f^{-1}(y_2)\right)' = 1/f'(x_2)$, et en faisant en (3.29) $y = 0$, nous déduisons:

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)} f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)-(x_2-x_1)f'(x_2)}{(f(x_2)-f(x_1))^2 f'(x_2)} f(x_1) f(x_2). \tag{3.30}$$

En procédant de proche en proche nous obtenons la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

$$x_{n+2} = x_n - \frac{x_{n+1}-x_n}{f(x_{n+1})-f(x_n)} f(x_n) \tag{3.31}$$
$$+ \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)-(x_{n+1}-x_n)f'(x_{n+1})}{(f(x_{n+1})-f(x_n))^2 \cdot f'(x_{n+1})} f(x_n) f'(x_{n+1}),$$

où $n = 1, 2, \ldots$

L'ordre de convergence de cette méthode est $\omega_1 = 1 + \sqrt{2}$.

BIBLIOGRAPHIE

available soon, refresh and click here →
[1] Berezin, I.G., Zidkov, P.N., *Metody vycislenii*, I. Moskow, 1962.
refresh and click here →
[2] Coman, Gh., *Some practical approximation methods for nonlinear equations*, Anal. Numér. Théor. Approx., **11**, 1-2, (1982), 41–48.
[3] Ostrowski, M.A., *Solution of Equations and Systems of Equations,* Academic Press New York - London, 1960.
available soon, refresh and click here →
[4] Păvăloiu, I., *Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare*, Ed. Dacia, 1981.
refresh and click here →
[5] Păvăloiu, I., *Introducere în aproximarea soluţiilor ecuaţiilor*, Ed. Dacia, 1976.
refresh and click here →
[6] Stancu, D.D., *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite şi a unor aplicaţii ale acesteia*, Studii şi Cercet. Mat. (Cluj), 3-4 VIII, (1957), 339-355.
[7] Traub, J.F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall Series in Automatic Computation 1964.
[8] Turowicz, B.A., *Sur les derivées d'ordre superiour d'une fonction inverse*, Colloq. Math., (1959), 83–87.

Reçu le 06.06.1982

Institutul de Calcul
3400 Cluj-Napoca, România