"Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1, 1986, pp.127-132

LA CONVERGENCE DE CERTAINES METHODES ITERATIVES POUR RESOUDRE CERTAINES EQUATIONS OPERATORIELLES

Ion Păvăloiu

Désignons pour E un espace de Banach et considérons une équation opératorielle

$$x = \lambda D(x) + y \tag{1}$$

où $D : E \to E$ est une application nonlinéaire.

Dans ce qui suit et pour resoudre l'équation (1), nous considérons le procédé itératif suivant:

$$x_{n+1} = x_n - A(x_n)[x_n - \lambda D(x_n) - y], \qquad n = 0, 1, \ldots, x_0 \in E \tag{2}$$

où $A(x) : E \to E$ est une application lineaire pour chaque $x \in E$.

Nous désignerons, pour fixer les idées, par $P : E \to E$ l'application $P(x) = x - \lambda D(x) - y$.

Si nous supposons que l'application D admet des dérivées jusqu'au second ordre inclusivement sur l'espace E, alors $P'(x) = I - \lambda D'(x)$ et

$p^n(x) = -\lambda D^n(x)$. Si $r \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, nous écrivons $S(x_0, r) = \{x \in E; \|x - x_0\| \leq r\}$.

En ce qui concerne la convergence du procédé (2) nous avons le théorème suivant:

Théorème 1. *Si les applications D et $A(x)$, l'élément initial x_0 et le nombre réel $r > 0$ remplissent les conditions:*

i. *L'application D admet des dérivées Frechet jusqu'au second ordre incusivement sur $S(x_0, r)$;*
ii. *$\|A(x)\| \leq \beta$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$, où $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$;*
iii. *$\|I - P'(x) A(x)\| \leq \alpha$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$;*
iv. *$\|D''(x)\| \leq M|\lambda|$, pour chaque $x \in S(x_0, r)$ où $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$;*
v. *$(\beta\rho_0) / (1 - d_0) \leq r$ où $\rho_0 = \|P(x_0)\|$, $d_0 = \frac{M\beta^2\rho_0}{2}$*
vi. *$d_0 < 1$,*

alors la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ générée par (2) est convergente et si nous écrivons $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, alors $P(\bar{x}) = \theta$. Nous avons la délimitation suivante:

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\beta d_0^n \rho_0}{1 - d_0}, \quad n = 0, 1, \ldots \; . \tag{3}$$

Démonstration. Nous montrerons par induction que les propriétés suivantes ont lieu:

a) $x_n \in S(x_0, r)$ pour chaque $n = 0, 1, \ldots$;
b) $\|P(x_n)\| \leq d_0^n \cdot \rho_0$, $n = 0, 1, \ldots$.

En effet, nous déduisons de (2) pour $n = 0$

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|A(x_0)\| \cdot \|P(x_0)\| \leq \beta\rho_0 \leq \beta\rho_0 / (1 - d_0) \leq r$$

d'où il s'ensuit que $x_0 \in B(x_0, r)$.

Nous supposerons que $x_i \in S(x_0, r)$ pour chaque $i = 0, 1, \ldots, k$. Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad \|P(x_i)\| &\leq \|P(x_i) - P(x_{i-1}) = p^*(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\| \\
&\quad + \|P(x_{i-1}) + P^*(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\| \\
&\leq \tfrac{M\beta^2}{2} \|P(x_{i-1})\|^2 + \alpha \|P(x_{i-1})\|, \qquad i = 1, 2, \ldots, k
\end{aligned}
$$

d'où en écrivant $d_{i-1} = \frac{M\beta^2}{2} \|P(x_{i-1})\| + \alpha$, $i = 1, 2, \ldots$ et an tenant compte de vi. on déduit immédiatement les inégalités suivantes:

$$
(5) \qquad d_0 \geq d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k.
$$

Il résulte de (4) et (5)

$$
(6) \qquad \|P(x_i)\| \leq d_0 \|P(x_{i-1})\|, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.
$$

Il s'ensuit

$$
\|P(x_i)\| \leq d_0^i \rho_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.
$$

Nous montrerons à présent que $x_{k+1} \in S(x_0, r)$. En effet, nous avons

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^{n} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \beta \sum_{i=0}^{k} \|P(x_i)\| \\
&\leq \beta\rho_0 \sum_{i=0}^{k} d_0^i \leq \tfrac{\beta\rho_0}{1-d_0} \leq r.
\end{aligned}
$$

Supposons que $n, p\ N$, nous avons alors

$$\|x_{n+p}-x_n\| \leq \sum_{i=1}^{p}\|x_{n+i}-x_{n+i-1}\| \leq \beta\sum_{i=1}^{p}\|P(x_{n+i-1})\| \tag{7}$$
$$\leq \beta\rho_0\sum_{i=1}^{p}d_0^{n+i-1} \leq \tfrac{\beta\rho_0 d_0^n}{1-d_0},$$

d'où il s'ensuit que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ générés par (2) est convergente. Si nous écriveons $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ et passons à la limite dans l'inégalité (7) quand $p \to \infty$, alors nous avons

$$\|\bar{x}-x_n\| \leq \frac{\beta\rho_0 d_0^n}{1-d_0}. \tag{8}$$

On déduit immédiatement de (8) pour $n = 0$ que $\bar{x} \in S(x_0, r)$. Si nous tenons compte que P est une appication continue, il résulte de b)

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = P(\bar{x}) = \theta,$$

c'est-à-dire que $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1).

Nous traitons à présent le cas où l'application $A(x)$ est donnée par l'égalité

$$A(x) = I + \lambda D'(x).$$

Nous avons alors

$$I - P'(x)A(x) = I - \big(I-\lambda D'(x)\big)\big(I+\lambda D'(x)\big) = \lambda^2\big(D'(x)\big)^2.$$

Si nous supposons que

$$\big\|D'(x)\big\| \leq b,$$

il s'ensuit alors

$$\left\|I - P'(x)\, A(x)\right\| \leq \lambda^2 \cdot b^2, \qquad \text{pour chaque } x \in S(x_0, r)\,.$$

Nous avons

$$\|A(x)\| \leq 1 + |\lambda| \cdot b,$$

pour chaque $x \in B(x_0, r)$. En ce cas la condition vi du théorème 1 devient pour $\alpha = \lambda^2 \cdot b^2$ et $\beta = 1 + |\lambda| \cdot b$

$$M\left(1 + |\lambda|\, b^2\right) \cdot \rho_0 + 2\lambda^2 \cdot b^2 - 2 < 0$$

ce qui, en supposans $2 - M\rho_0 > 0$, conduit à l'inégalité

$$|\lambda| < \tfrac{b(2-M\rho_0)}{2+M\rho_0}.$$

□

En tenant compte de ce qui précède, il résulte du théorème 1 le théorème suivant:

Théorème 2. *Si l'application D, l'élément initial x_0 et le nombre réel $r > 0$ remplissent les conditions suivantes:*

i. *L'application D admet des dérivées Fréchet jusqu'au second ordre inclusivement pour chaque $x \in S(x_0, r)$;*
ii. $\|D'(x)\| \leq b$ *pour chaque* $x \in S(x_0, r)$;
iii. $\|D''(x)\| \leq M\,|\lambda|$ *pour chaque* $x \in S(x_0, r)$;
iv. $2 - M\rho_0 > 0$ *où* $\rho_0 = \|x_0 - \lambda D(x_0) - y\|$;
v.
$$\tfrac{\rho_0(1+|\lambda|b)}{1-d_0} \leq r \ \text{ où } \ d_0 = M\tfrac{1+|\lambda|b^2}{2}\rho_0 + \lambda^2 \cdot b^2;$$
vi. $|\lambda| \leq b\frac{2-M\rho_0}{2+M\rho_0}$,

alors la suite générée par

$$x_{n+1} = x_n - [1 - \lambda D'(x_n)][x_n - \lambda D(x_n) - y], \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

converge vers la solution $\bar{x}$ *de l'équation* (1) *et l'on a la délimitation:*

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{(1 + |\lambda| b) d_0^n \rho_0}{1 - d_0}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Bibliographie

[1] Kantorovici, L.V., *O metodî Niutona* Trudî Mat. Inst. V.A. Steklova 28, 104–144 (1949).

clickable → [2] Diaconu, A., Păvăloiu, I., *Sur quelque méthodes itératives pour la resolution des équations opérationnelles*, Rev. Anal. Numér. Theor. Approx., vol. 1, 45–61 (1972).

clickable → [3] Păvăloiu, I., *Sur les procédés itératifs à un ordre élévé de convergence*, Mathematica (Cluj), 12 (35) 1, 149–158 (1970).