"Babeş-Bolyai" University
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1, 1987, pp.121-129

ESTIMATION DES ERREURS DANS LA RESOLUTION NUMÉRIQUE DES SYSTEMES D'EQUATIONS DANS DES ESPACES METRIQUES*)

ION PĂVĂLOIU

Désignons par (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$ deux espaces métriques complets et par $X = X_1 \times X_2$ le produit cartésien de ces espaces.

Nous désignons par $F_1 : X \to X_1$ et $F_2 : X \to X_2$ deux applications et nous considérons le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} &x_1 = F_1(x_1, x_2) \\ &x_2 = F_2(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in X. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour la résolution du système d'équations (1) nous considérons le procédé itératif suivant, du type Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} &x_1^{(n+1)} = F_1\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right) \\ &x_2^{(n+1)} = F_2\left(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots, \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) \in X. \end{aligned} \tag{2}$$

En ce qui concerne la convergence des suites nous avons le Théorème suivant [1]:

THÉORÈME **1.** *Si les applications F_1 et F_2 vérifient les conditions*

$$\rho_1(F_1(x_1, y_1), F_1(x_2, y_2)) \le \alpha \rho_1(x_1, x_2) + \beta \rho_2(y_1, y_2),$$
$$\rho_2(F_2(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)) \le a \rho_1(x_1, x_2) + b \rho_2(y_1, y_2)$$

*) This paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

pour tous les $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$, *ou* α, β, a *et* b *sont des nombres réels nonnégatifs;*

Si les nombres α, β, a *et* b *vérifient les relations*

$$\alpha + b + a\beta < 2$$
$$(1-\alpha)(1-b) > a\beta, \qquad b > 0, \quad \alpha > 0$$

alors le système (1) *admet une seul solution* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X$ *et les suites* $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$, $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ *sont convergentes:*

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \bar{x}_1, \quad \lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = \bar{x}_2.$$

Démonstration. Nous désignons par $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ deux suites de nombres non-négatifs dont les éléments vérifient les relations

$$\begin{aligned} &f_n \leq \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \\ &g_n \leq a f_n + b g_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Nous associons aux relations (3) le système d'équations en les inconnues h et k suivant

$$\begin{aligned} \alpha + \beta h &= hk \\ ak + b &= nk \end{aligned} \tag{4}$$

Nous montrerons par la suite que le système (4) admet une solutions réelle (h_i, k_i) pour laquelle $0 \leq h_i k_i < 1$ si et seulement si les nombres a, b, α et β remplissent les conditions du Théorème 1.

Nous supposons que le système (4) admet les solutions (h_i, k_i), $i = 1, 2$ pour lesquelles les conditons $0 < h_i k_i < 1$ sont remplies. On vérifie immèdiatement que du système (4) résultent les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \beta h^2 - (b + \beta a - \alpha) h - \alpha a &= 0 \\ ak^2 - (\alpha + \beta a - b) k - \beta b &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

et

$$p^2 - (b + \beta a + \alpha) p - b\alpha = 0 \tag{6}$$

où l'on a désigné par p le produit hk. Les équations (5) nous montrent que les solutions (h_i, k_i), $i = 1, 2$ du système (4) sont réelles et de l'équation (6) et des conditions $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2$ il résulte $f(0) > 0$, $f(1) > 0$ et $b + \beta a + \alpha < 2$, où $f(p) = p^2 - (b + \beta a + \alpha) p + b\alpha$. Il est évident que la condition $f(0) > 0$ est remplie parce que $\alpha > 0, b > 0$, $f(1) > 0$ et $b + a\beta + \alpha < 2$ représentent les relations de l'hypothèse du Théorème 1.

Si nous supposons à présent que les relations de l'hypothèse du Théorème 1 sont vérifiées, alors il est évident que $f(1) > 0$, $f(0) > 0$ et $b + a\beta + \alpha < 2$, ce qui nous montre que l'équation (6) a ses deux racines positives et moindres que l'unité. En tenant compte des équations (5), nous constatons facilement que le système (4) admet une solution (h_1, k_1) pour laquelle $h_1 > 0$, $k_1 > 0$.

Nous montrons à présent que si les éléments des suites $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ vérifient les relations (3) où les nombres α, β, a et b vérifient l'hypothèse du théorème 1, alors il existe une constante $C > 0$, indépendente de n telle que pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ ont lieu les relations

$$\begin{aligned} f_n &\leq C h_1^{n-1} k_1^{n-1} \\ g_n &\leq C h_1^{n} k_1^{n-1} \end{aligned} \tag{7}$$

et les séries $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ sont convergentes.

Désignons par C un nombre réel qui vérifie l'inégalité

$$C \geq \max\left\{\alpha f_0 + \beta g_0, \tfrac{a f_1 + b g_0}{h_1}\right\} \tag{8}$$

où (h_1, k_1) est la solution positive du système (4).

De (8) et (3) nous déduisons pour $n = 1$

$$f_1 \leq C \quad \text{and} \quad g_1 \leq C h_1$$

donc les relations (7) sont vérifiées pour $n = 1$.

Nous supposons que les inégalités suivantes ont lieu:

$$f_{k-1} \leq C\ h_1^{k-2} \cdot k_1^{k-2}, \qquad g_{k-1} \leq C\ h_1^{k-1} \cdot k_1^{k-2}, \qquad k = 2, \ldots, n$$

De (3) et (4) nous déduisons

$$\begin{aligned} f_n &\leq \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \leq C h_1^{n-2} k_1^{n-2} (\alpha + \beta h_1) = C h_1^{n-1} k_1^{n-1} \\ g_n &\leq a f_n + b g_{n-1} \leq C\ h_1^{n-1} k_1^{n-2} (a k_1 + b) = C h_1^{n} k_1^{n-1} \end{aligned}$$

ce qui nous montre que les relations (7) on lieu pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est évident que les séries $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ sont convergentes, parce que de (7) il s'ensuit qu'elles sont majorées par deux séries géométriques à raison moindre que l'unité.

De (2) et de l'hypothèse du Théorème 1 nous déduisons les relations:

(9)

$$\rho_1\left(x_1^{(n+1)}, x_1^{(n)}\right) \leq \alpha\rho_1\left(x_1^{(n)}, x_1^{(n-1)}\right) + \beta\rho_2\left(x_2^{(n)}, x_2^{(n-1)}\right)$$
$$\rho_2\left(x_2^{(n+1)}, x_2^{(n)}\right) \leq a\rho_1\left(x_1^{(n+1)}, x_1^{(n)}\right) + b\rho_2\left(x_2^{(n)}, x_2^{(n-1)}\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Nous posons à présent en (9) $f_i = \rho_1\left(x_1^{(i+1)}, x_1^{(i)}\right), g_i = \rho_2\left(x_2^{(i+1)}, x_2^{(i)}\right)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ et nous obtenons les relations (3). En tenant compte des hypothèses du Théorème 1 nous en déduisons les relations

$$\begin{aligned} \rho_1\left(x_1^{(i+1)}, x_1^{(i)}\right) &\leq C\ h_1^{i-1} \cdot k_1^{i-1} \\ \rho_2\left(x_2^{(i+1)}, x_2^{(i)}\right) &\leq C\ h_1^{i} \cdot k_1^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

Nous montrerons à présent que suites $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

Nous avons en effet

$$\begin{aligned} \rho_1\left(x_1^{(n+s)}, x_1^{(n)}\right) &\leq f_{n+s-1} + f_{n+s-2} + \ldots + f_n \\ &\leq p_1^{n-1} C\left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{s-1}\right) \leq \tfrac{Cp_1^{n-1}}{1-p_1} \end{aligned} \tag{11}$$

où $p_1 = h_1 k_1$.

Nous déduisons de la même facon

$$\rho_2\left(x_2^{(n+s)}, x_2^{(n)}\right) \leq g_{n+s-1} + g_{n+s-2} + \ldots + g_n \leq \tfrac{Ch_1 p_1^{n-1}}{1-p_1}. \tag{12}$$

En tenant compte que $0 < p_1 < 1$ et du fait que les espaces X_1 et X_2 sont complets, il résulte que les suites $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

Si nous posons $\bar{x}_1 = \lim_{n\to\infty} x_1^{(n)}$ and $\bar{x}_2 = \lim_{n\to\infty} x_2^{(n)}$ alors en tenant compte de la continuité des applications F_1 et F_2 et en passant à la limite dans les égalités (2) lorsque $n \to \infty$ il résulte que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ répresente une solution du système (1).

En ce qui concerne l'unicité de la solution, nous supposerons par l'absurde que le système (1) n'a pas une solution unique.

Désignons par $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ et $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ deux solutions du système (1). Il résulte de la première condition du théorème 1:

$$\begin{aligned}\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &\leq \alpha\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \beta\rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\\ \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) &\leq a\ \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + b\rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\,\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &\leq \beta\rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\\ (1-b)\,\rho_2(\bar{x}_1, \bar{y}_2) &\leq a\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\,.\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \leq \tfrac{\beta\ a}{(1-\alpha)(1-b)}\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$$

et

$$\rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \leq \tfrac{\beta\ a}{(1-\alpha)(1-b)}\rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\,,$$

mais $\frac{\beta\ a}{(1-\alpha)(1-b)} < 1$ par conséquent les dernière inégalités ont lieu si et seulement si $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$ et $\bar{x}_2 = \bar{y}_2$.

Il résulte de (11) et (12) pour $s \to \infty$

$$\rho_1\big(\bar{x}_1, x_1^{(n)}\big) \leq \tfrac{C\cdot p_1^{n-1}}{1-p_1} \qquad et \quad \rho_2\big(\bar{x}_2, x_2^{(n)}\big) \leq \tfrac{Ch_1 p_1^n}{1-p_1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$\square$

Désignons à présent par $F_1^* : X \to X_1,\ F_2^* : X \to X_2$ deux autres applications qui vérifient auprès de F_1 et F_2 les conditions

$$\begin{aligned}\rho_1(F_1^*(u,v), F_1(u,v)) &\leq \delta_1\\ \rho_2(F_2^*(u,v), F_2(u,v)) &\leq \delta_2\end{aligned} \tag{13}$$

pour tout $(u, v) \in X$, où $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$ sont deux nombres réels donnés.

A côte du procédé itératif (2) nous considérons le procédé itératif suivant:

$$\begin{aligned}\xi_1^{(n+1)} &= F_1^*\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right)\\ \xi_2^{(n+1)} &= F_2^*\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right), \quad n = 0, 1, \ldots,\ \big(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}\big) \in X.\end{aligned} \tag{14}$$

En ce qui suit nous procéderons à la délimitation des erreurs au cas où la racine $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ du système (1) est approchée par des éléments des suites $\left(\xi_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ $\left(\xi_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ générées à l'aide du procédé (14). Nous n'avons évidemment aucune information concernant les applications F_1^* et F_2^* si non qu'elles vérifient les relations (13), c'est pourquoi nous ne pouvons rien affirmer relativement à la convergence des suites $\left(\xi_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(\xi_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$.

Nous montrerons par la suite que le processus du calcul des éléments des suites $\left(\xi_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(\xi_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ peut être certainement arrêté quand $\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) < \varepsilon_1$ et $\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) < \varepsilon_2$, si ε_1 et ε_2 sont convenablement choisis par rapport aux nombres $\delta_1, \delta_2, a, b, \alpha$ et β.

Nous avons en effet

$$\begin{aligned}
\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) =& \rho_1\left(F_1^*\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right), F_1^*\left(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}\right)\right) \\
\leq& \rho_1\left(F_1^*\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right), F_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right)\right) \\
&+ \rho_1\left(F_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right), F_1\left(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}\right)\right) \\
&+ \rho_1\left(F_1\left(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}\right), F_1^*\left(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}\right)\right) \\
\leq& \alpha\rho_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_1^{(n-1)}\right) + \beta\rho_2\left(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}\right) + 2\delta_1.
\end{aligned}$$

Pour $\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right)$ nous avons de la même manière

$$\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) \leq a\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) + b\rho_2\left(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}\right) + 2\delta_2.$$

Si nous écrivons maintenant $f_n^* = \rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right), g_n^* = \rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right)$, $n = 0, 1, \ldots$ alors les inégalités ci-dessus s'écrivent

$$\begin{aligned}
f_n^* &\leq \alpha f_{n-1}^* + \beta\ g_{n-1}^* + 2\delta_1 \\
g_n^* &\leq a\ f_n^* + b\ g_{n-1}^* + 2\delta_2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Si nous nous plaçon dans les hypothèses du Théorème 1, alors il existe une constante C_1 indépendente de n, telle que nous avons les relations suivantes:

$$f_n^* \leq C_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1} + \tfrac{2[\beta\delta_2+(1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \tag{16}$$
$$g_n^* \leq C_1 h_1^{n} k_1^{n-1} + \tfrac{2[(1-\alpha)\delta_2+a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}, \qquad n=1,2,\ldots$$

où (h_1,k_1) est la solution du système (4) qui vérifie les conditions: $0< h_1k_1<1,\ h_1>0,\ k_1>0$.

En effet, si nous choisissons C_1 tel que

$$C_1 \geq \max\left\{\left|\alpha f_0^* + \beta g_0^* + 2\delta_1 - \tfrac{2[\beta\delta_2+(1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}\right|,\right.$$
$$\left.\tfrac{1}{h_1}\left|a f_1^* + b g_0^* + 2\delta_2 - \tfrac{2[(1-\alpha)\delta_2+a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}\right|\right\}$$

alors il est évident que

$$f_1^* \leq \alpha f_0^* + \beta g_0^* + 2\delta_1 \leq C_1 + \tfrac{2[\beta\delta_2+(1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}$$
$$g_1^* \leq a\ f_1^* + b\ g_0^* + 2\delta_2 \leq C_1 h_1 + \tfrac{2[(1-\alpha)\delta_2+a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}$$

et les inégalités (16) sont vérifiées pour $n=1$.

Nous supposons que les relations (16) sont vérifiées pour chaque $n = 1,2,\ldots s$ et nous montrerons qu'elles ont lieu également pour $n=s+1$. Nous déduisons de (15)

$$f_{s+1}^* \leq \alpha C_1 h_1^{s-1} k_1^{s-1} + \beta\ C_1 h_1^{s} k_1^{s-1} + \tfrac{2\alpha[\beta\delta_2+(1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} + \tfrac{2\beta[(1-\alpha)\delta_2+a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} + 2\delta_1$$
$$= C_1 h_1^{s-1} k_1^{s-1}\,(\alpha + \beta\ h_1) + \tfrac{2[\beta\delta_2+(1-b)\delta_1]}{(1-b)(1-\alpha)-a\beta}$$
$$= C_1 h_1^{s} k_1^{s} + \tfrac{2[\beta\delta_2+(1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}.$$

On montre de la même manière que la seconde inégalité (16) a égalament lieu pour $n=s+1$.

Si à pre'sent nous supposons que

$$\varepsilon_1 > \tfrac{2[\beta\delta_2+(1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \tag{17}$$
$$\varepsilon_2 > \tfrac{2[(1-\alpha)\delta_2+a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}$$

alors les relations (16) nous assurent qu'il existe un $n' \in N$ tel que pour tout $n > n'$ nous ayons les inégalités $\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) < \varepsilon_1$ et $\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) < \varepsilon_2$. Désignons par ε_1 et ε_2 deux nombres positifs qui vérifient les relations (17) et $n > n'+1$. Nous proposons d'évaluer dans ces conditions les distances entre $\bar{x}_1$ et $\xi_1^{(n+1)}$ et $\bar{x}_2$ et $\xi_2^{(n+1)}$, c'est -à-dire la délimitation des erreurs au cas de la résolution du système (1) à l'aide d'un procédé d'approximation de la forme (14) où les applications F_1^* et F_2^* dépendent de F_1 et F_2 par les relations (13). En tenant compte des hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés, nous aurons

$$\begin{aligned}\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) =&\rho_1\left(F_1\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right), F_1^*\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right)\right)\\ \leq&\rho_1\left(F_1\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right), F_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right)\right)\\ &+\rho_1\left(F_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right), F_1^*\left(\xi_1^{(n)} l \xi_2^{(n)}\right)\right)\\ \leq&\alpha\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)}\right)+\beta\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}\right)+\delta_1.\end{aligned}$$

Nous avons de manière analogue pour $\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right)$:

$$\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right) \leq a\ \rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right)+b\ \rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}\right)+\delta_2$$

Nous déduisons des inégalités ci-dessus

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\,\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) &\leq \alpha\varepsilon_1+\beta\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}\right)+\delta_1\\ (1-b)\,\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right) &\leq a\ \rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right)+b\ \varepsilon_2+\delta_2\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) &\leq \left(\tfrac{\alpha}{1-\alpha}\varepsilon_1+\tfrac{\beta}{1-\alpha}\rho_2\left(\bar{x}_1, \xi_2^{(n)}\right)+\tfrac{\delta_1}{1-\alpha}\right)\\ \rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right) &\leq \tfrac{a}{1-b}\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right)+\tfrac{b}{1-b}\varepsilon_2+\tfrac{\delta_2}{1-b}\end{aligned} \tag{18}$$

d'où il résulte

$$\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right) \leq \tfrac{a(\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2)+b(1-\alpha)\varepsilon_2}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}+\tfrac{\varepsilon_2}{2} \tag{19}$$

Du fait que $n>n'+1$, il résulte que la seconde inégalité de (18) a lieu aussi au cas où nous mettons n à la place de $n+1$, c'est-à-dire

$$\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}\right) \leq \tfrac{a}{1-b}\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)}\right)+\tfrac{b\varepsilon_2}{1-b}+\tfrac{\delta_2}{1-b}$$

Cette inégalité et la première inégalité (18) nous donnent

$$\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) \leq \tfrac{\beta(a\varepsilon_1+b\varepsilon_2)+\alpha\varepsilon_1(1-b)}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}+\tfrac{\varepsilon_1}{2} \tag{20}$$

Bibliographie

[1] Păvăloiu, I., *La résolution des systèmes operationnelles a l'aide des methodes iteratives,* Mathematica, 11(34), 1969, 137–141. ← clickable

[2] Urabe, M., *Error estimation in numerical solution of equation by iteration processes*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 26 (1962), 77–91.