"Babeş-Bolyai" University
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1, 1987, pp.130-134

ON ALGORYTHME DE CALCUL DANS LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PAR INTERPOLATION

Ion Păvăloiu

Désignons par $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction où I est un intervalle de l'axe réel. Nous consiérons l'équation

$$f(x) = \theta, \tag{1}$$

et nous supposons que cette équation admet une seule solution $\bar{x} \in I$. Nous désignons par $F = f(I)$ l'ensemble des velaurs de la fonction f pour $x \in I$. Nous supposerons que la fonction f admet une fonction inverse $f^{-1} : F \to I$.

Nous désignons par $x_i \in I,\ i = 1, 2, \ldots, n+1,\ x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, $n+1$ approximations différentes de la solution $\bar{x}$ de l'équation (1) et nous écrivons $y_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Le polynome

$$L_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}; f^{-1}|y\right) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \tfrac{\omega(y)}{(y-y_i)\omega'(y_i)} \tag{2}$$

où

$$\omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i) \tag{3}$$

vérifie les conditions

$$L_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}; f^{-1}|y_i\right) = x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{4}$$

Si $\bar{x} \in I$, alors $0 \in F$ et $f^{-1}(0) = \bar{x}$. En ce cas, en faisent $y = 0$ an (2) nous obenons une approximation pour $\bar{x}$, c'est-à-dire

$$\bar{x} \simeq L_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}; f^{-1}|0\right). \tag{5}$$

En tenant compte de l'énégalité

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) - L_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}; f^{-1}|0\right) = \\ = (-1)^{n+1}\left[y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, 0; f^{-1}|0\right] y_1 y_2 \ldots y_{n+1} \end{aligned} \tag{6}$$

et en écrivent $x_{n+2} = L_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}; f^{-1}|0\right)$, nous obtenons

$$\bar{x} - x_{n+2} = (-1)^{n+1}\left[y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, 0; f^{-1}\right] y_1 y_2 \ldots y_{n+1}. \tag{7}$$

Nous en déduisons qu'abstraction faite du facteur

$$(-1)^{n+1}\left[y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, 0; f^{-1}\right]$$

x_{n+2} sera une approximation pour $\bar{x}$, d'autant meilleure que les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ sont plus proches de 0.

De'signons à présent par $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+1} \in I$, $n+1$ approximations de la solution $\bar{x}$, alors les nombres

$$x_{i+n+2} = L_n\left(y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_{i+n+1}; f^{-1}|0\right) \tag{8}$$

peuvent eux aussi considèrés comme des approximations pour $\bar{x}$.

Nous supposerons à présent que pour tous les $u_1, \ldots, u_{n+1} \in F$,

$$\left|\left[u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, 0; f^{-1}\right]\right| \leq M < +\infty.$$

Nous avons alors

$$|\bar{x} - x_{i+n+2}| \leq M \cdot |y_{i+1}| \cdot |y_{i+2}| \cdots |y_{i+n+1}|, \qquad i = 0, 1, \ldots\ , \tag{9}$$

Si la differences divisee du premier ordre de la fonction f est bornee, c'est-à-dire $|[x, y; f]| \leq \beta$ pour tous les $x, y \in I$, alors nous obtenons de (9)

(10)
$$|\bar{x} - x_{i+n+2}| \leq M\beta^{n+1} |\bar{x} - x_{i+1}| \, |\bar{x} - x_{i+2}| \dots |\bar{x} - x_{i+n+1}| \,, \quad i = 1, 2, \dots$$

Nous écrirons $\alpha = M\beta^{n+1}$ et $\rho_i = \alpha^{\frac{1}{n}} |\bar{x} - x_i| \,, \; i = 1, 2, \dots$

Il résulte alors de (10)

(11) $$\rho_{i+n+2} \leq \rho_{i+1} \cdot \rho_{i+2} \cdots \rho_{i+n+1}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

Nous consiérons à présent l'équation aux différences

(12) $$\gamma_{i+n+2} = \gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} + \dots + \gamma_{i+n+1}, \qquad i = 0, 1, \dots$$

et nous supposons gu'il existe un nombre $d < 1$ tel que $\rho_s \leq d^{\gamma_s}$ pour $s = 1, 2, \dots, n + 1$.

Nous associons à l'équation (12) l'équation

(13) $$t^{n+1} = t^n + t^{n-1} + \dots + t + 1.$$

En ce cas, la solution de l'équation (12) peut s'exprimer comme suit:

(14) $$\gamma_{i+k} = C_1 t_1^{i+k} + C_2 t_2^{i+k} + \dots + C_{n+1} t_{n+1}^{i+k}$$

où $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ sont les racines de l'équation (13) et $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ se déterminent par les conditions initiales $\gamma_s = \gamma_s^0, \; s = 1, 2, \dots, n + 1$.

On constate facilement que l'équation (13) admet une seule racine réelle ω; $1 < \omega < 2$.

Si nous admettons que

(15) $$\rho_s \leq d^{\omega^s}; \; s = 1, 2, \dots, n + 1$$

alors nous déduisons facilement de (11) que les inégalités (15) ont lieu pour tout $s \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que

(16) $$\lim_{n \to \infty} \rho_n = 0$$

c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers la solution de l'équation (1).

Nous présenterons par la suite un algorythme de calcul des valeurs des polynomes $\omega_k\left(0\right)$ et $\omega_k'\left(y_i\right),\ i=k,\ k+1,\ldots,k+n$, où

$$\omega_k\left(y\right)=\prod_{i=k}^{k+n}\left(y-y_i\right),\qquad k=1,2,\ldots \tag{17}$$

Les polynomes (17) sont utilisés à la construction de la suite de polynomes d'interpolation inverse de Lagrange, qui conduisent à la suite d'approximations $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dont les éléments sont donnés par l'égalité (8).

Il résulte de (17)

$$\omega_{k+1}\left(y\right)=\omega_k\left(y\right)\cdot\tfrac{y-y_{n+k+1}}{y-y_k}$$

d'où nous déduisons la relation

$$\omega_{k+1}\left(0\right)=\omega_k\left(0\right)\cdot\tfrac{y_{n+k+1}}{y_k} \tag{18}$$

qui nous offre une formule des récurrence pour le calcul des valeurs des polynomes ω_k pour $y=0$.

Pour $\omega_{k+1}'\left(y\right)$ nous avons

$$\omega_{k+1}\left(y\right)=\tfrac{\left[\omega_k(y)(y-y_{n+k+1})+\omega_k(y)\right](y-y_k)-\omega_k(y)(y-y_{n+k+1})}{(y-y_k)^2}.$$

Nous en déduisons les formules de récurrence suivantes:

$$\omega_{k+1}'\left(y_i\right)=\begin{cases}\omega_k'\left(y_i\right)\tfrac{y_i-y_{n+k+1}}{y_i-y_k}, & \text{pour } i=\overline{k+1,k+n}\\ \omega_k\tfrac{y_i}{y_i-y_k}, & \text{pour } \ i=n+k+1\end{cases} \tag{19}$$

Les relations de récurrence (18) et (19) nous offrent la posibilité d'obtenir la suite de polynomes d'interpolation inverse de Lagrange, an utilisent à un pas quelconque d'itération certaine éléments qui ont déjà calculés au cours du pas précédent.

Bibliographie

[1] I. Păvăloiu, *Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981.

Institutul de Matematică
Oficiul Poştal 1, C.P. 68
3400 Cluj-Napoca, Romania

This paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.