

DÉLIMITATIONS DES ERREURS DANS LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Ion Păvăloiu

Désignons par (X_i, ρ_i) , $i = 1, 2$ deux espaces métriques complets et par $X = X_1 \times X_2$ le produit cartésien de ces espaces. Nous désignerons par $F_1 : X \rightarrow X_1$ et $F_2 : X \rightarrow X_2$ deux applications de l'espace X en X_1 , respectivement en X_2 et nous considérons le système d'équations suivant:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1, x_2) \\ x_2 &= F_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in X. \end{aligned}$$

Pour résoudre le système (1) nous adopterons le procédé itératif de type Gauss-Seidel suivant:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= F_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}), \quad n = 0, 1, \dots; (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in X \end{aligned}$$

Dans les travaux [1], [2] nous avons étudié la convergence de la méthode (2) dans l'hypothèse que les applications F_1 et F_2 remplissent des conditions de type Lipschitz dans tout l'espace X .

Dans la travail [3] nous avons obtenu des délimitations des erreurs dans la résolutions numérique du système (1) à l'aide d'une méthode de type (2), dans laquelle les applications F_1 et F_2 sont remplacées par

deux autres applications F_1^* et F_2^* , qui remplissent certaines conditions de rapprochement de F_2 et F_1 dans tout l'espace X .

Dans les applications de cette théorie à la résolution d'une classe d'équations concrètes, les conditions imposées aux applications F_1, F_2, F_1^* et F_2^* dans tout l'espace X sont gênantes, à cause du fait que l'espace X peut ne pas être borné.

Dans ce qui suit nous étudierons ce problème dans l'hypothèse où F_1 et F_2 remplissent des conditions de type Lipschitz et des conditions de rapprochement de F_1^* et F_2^* dans certains sous-ensembles bornés $D_1 \subset X_1$ et $D_2 \subset X_2$.

Désignons par conséquent par D_1 et D_2 deux ensembles bornés des espaces X_1 respectivement X_2 et par $D = D_1 \times D_2$ leur produit cartésien. Considérons deux suites $(f_n)_{n=0}^\infty$ et $(g_n)_{n=0}^\infty$ dont les éléments remplissent les conditions:

$$(3) \quad \begin{aligned} f_n &\leq \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \\ g_n &\leq a f_n + b g_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

où α, β, a et b sont des nombres réels non-négatifs et $f_n \geq 0, g_n \geq 0$ pour tout $n = 0, 1, \dots$

Nous associerons au système (3) le système d'équations suivant en les inconnues h et k :

$$(4) \quad \begin{aligned} \alpha + \beta h &= h k \\ a k + b &= n k \end{aligned}$$

Dans les travaux [1], [2] et [3] nous avons montré que si les nombres α, β, a et b vérifient les relations

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha + b + a\beta &< 2 \\ (1 - \alpha)(1 - b) - a\beta &> 0 \\ b > 0, \alpha &> 0 \end{aligned}$$

alors le système (4) admet les solutions réelles (h_i, k_i) , $i = 1, 2$ pour lesquelles $0 < h_i k_i < 1$ et que l'une des solutions vérifie les conditions $h_1 > 0, k_1 > 0$. De plus, les éléments des suites $(f_n)_{n=0}^\infty (g_n)_{n=0}^\infty$ vérifient

les relations

$$(6) \quad \begin{aligned} f_n &\leq C h_1^{n-1} k_1^{n-1} \\ g_n &\leq C h_1^n k_1^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

où $C = \max\{\alpha f_0 + \beta g_0, \frac{\alpha f_1 + \beta g_0}{h_1}\}$.

Si nous écrivons $p_1 = h_1, k_1$ alors on constate aisément à l'aide de (4) que p_1 vérifie l'équation

$$(7) \quad p^2 - (b + \beta a + \alpha) p + b\alpha = 0.$$

Désignons par $d_1 > 0$ un nombre tel que $S_1 \subseteq D_1, S_2 \subseteq D_2$, où

$$(8) \quad \begin{aligned} S_1 &= \left\{ x \in X_1 : \rho_1(x, x_1^{(0)}) \leq \frac{d_1}{1-p_1} \right\} \\ S_2 &= \left\{ x \in X_2 : \rho_2(x, x_2^{(0)}) \leq \frac{d_1 h_1}{1-p_1} \right\} \end{aligned}$$

En ce qui concerne la convergence des suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^\infty, (x_2^{(n)})_{n=0}^\infty$ on a le théorème suivant:

Théorème 1. *Si les applications F_1, F_2 vérifient les conditions*

i.

$$\begin{aligned} \rho_1(F_1(x_1, y_1), F_1(x_2, y_2)) &\leq \alpha \rho_1(x_1, x_2) + \beta \rho_2(x_2, y_2) \\ \rho_2(F_2(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)) &\leq a \rho_1(x_1, x_2) + b \rho_2(x_2, y_2) \end{aligned}$$

pour toutes les $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in D$;

ii. Les nombres α, β, a et b vérifient les relations (5);

iii. Les éléments $x_1^{(1)}$ et $x_2^{(1)}$ des suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^\infty, (x_2^{(n)})_{n=0}^\infty$ vérifient les conditions $\rho_1(x_1^{(0)}, x_1^{(1)}) < d_1$ et $\rho_2(x_2^{(0)}, x_2^{(1)}) \leq d_1 h_1$.

Alors sont vraies les propriétés suivantes:

j. Ces suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^\infty, (x_2^{(n)})_{n=0}^\infty$ construites à l'aide du procédé (2) sont convergentes;

jj. Si l'on écrit $\bar{x}_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)}$ et $\bar{x}_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)}$ alors $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in S$ où $S = S_1 \times S_2$ et (\bar{x}_1, \bar{x}_2) est la seule solution du système (1) dans l'ensemble S ;

jjj. *Les relations suivantes ont lieu*

$$\begin{aligned}\rho_1(\bar{x}_1, x_1^{(n)}) &\leq \frac{d_1 p_1^n}{1-p_1} \\ \rho_2(\bar{x}_2, x_2^{(n)}) &\leq \frac{d_1 h_1 p_1^n}{1-p_1}\end{aligned}$$

Démonstration. De i. et de (2) nous déduisons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}\rho_1(x_1^{(2)}, x_1^{(1)}) &\leq \alpha \rho_1(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}) + \beta \rho_2(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}) \\ &\leq \alpha d_1 + \beta d_1 h_1 \leq d_1 p_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\rho_2(x_2^{(2)}, x_2^{(1)}) &\leq a \rho_1(x_1^{(2)}, x_1^{(1)}) + b \rho_2(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \\ &\leq a d_1 p_1 + b d_1 h_1 \leq d_1 h_1 p_1.\end{aligned}$$

Nous montrons à présent que $x_1^{(2)} \in S_1$ et $x_2^{(2)} \in S_2$. Nous avons en effet

$$\begin{aligned}\rho_1(x_1^{(2)}, x_1^{(0)}) &\leq \rho_1(x_1^{(2)}, x_1^{(1)}) + \rho_1(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}) \\ d_1 + d_1 p_1 &< \frac{d_1}{1-p_1},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\rho_2(x_2^{(2)}, x_2^{(0)}) &\leq \rho_2(x_2^{(2)}, x_2^{(1)}) + \rho_2(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \\ &\leq d_1 h_1 + d_1 p_1 h_1 \leq \frac{h_1 d_1}{1-p_1}\end{aligned}$$

d'où il résulte que $x_1^{(2)} \in S_1, x_2^{(2)} \in S_2$.

Nous supposons à présent que les inégalités suivantes ont lieu

$$(9) \quad \begin{aligned}\rho_1(x_1^{(i)}, x_1^{(i-1)}) &\leq d_1 p_1^{i-1} \\ \rho_2(x_2^{(i)}, x_2^{(i-1)}) &\leq d_1 h_1 p_1^{i-1}\end{aligned}$$

pour $i = 1, 2, \dots, k$ et

$$(10) \quad x_1^{(k)} \in S_1, x_2^{(k)} \in S_2.$$

En tenant compte de ii., nous déduisons des hypothèses (9) et (10) et de i.

$$\begin{aligned}\rho_1 \left(x_1^{(k+1)}, x_1^{(k)} \right) &= \rho_1 \left(F_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}), F_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}) \right) \\ &\leq \alpha \rho_1 \left(x_1^{(k)}, x_1^{(k-1)} \right) + \beta \rho_2 \left(x_2^{(k)}, x_2^{(k-1)} \right) \\ &\leq d_1 p_1^{k-1} (\alpha + \beta h_1) = d_1 p_1^k\end{aligned}$$

et en tenant compte de l'inégalité ci-dessus nous déduisons de manière analogue

$$\rho_2 \left(x_2^{(k+1)}, x_2^{(k)} \right) \leq d_1 \cdot h_1 \cdot p_1^k$$

d'où il résulte que les relations (9) ont également lieu pour $i = k + 1$. Nous montrerons maintenant que $x_1^{(k+1)} \in S_1$ et $x_2^{(k+1)} \in S_2$. Il résulte des inégalités ci-dessus

$$\begin{aligned}\rho_1 \left(x_1^{(k+1)}, x_1^{(0)} \right) &\leq \rho_1 \left(x_1^{(k+1)}, x_1^{(k)} \right) + \rho_1 \left(x_1^{(k)}, x_1^{(k-1)} \right) + \dots + \rho_1 \left(x_1^{(1)}, x_1^{(0)} \right) \\ &\leq d_1 + d_1 p_1 + d_1 p_1^2 + \dots + d_1 p_1^k < \frac{d_1}{1-p_1}\end{aligned}$$

et de manière analogue

$$\rho_2 \left(x_2^{(k+1)}, x_2^{(0)} \right) < \frac{d_1 h_1}{1-p_1}.$$

Du fait que les inégalités (9) ont lieu pour tout $i = 1, 2, \dots$, il résulte que les suites $\left(x_1^{(n)} \right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(x_2^{(n)} \right)_{n=0}^{\infty}$ sont fondamentales et que les inégalités suivantes sont vraies

$$(11) \quad \begin{aligned}\rho_1 \left(x_1^{(n+s)}, x_1^{(n)} \right) &\leq \frac{d_1 p_1^n}{1-p_1} \\ \rho_2 \left(x_2^{(n+s)}, x_2^{(n)} \right) &\leq \frac{d_1 h_1 p_1^n}{1-p_1}\end{aligned}$$

pour tout $n = 0, 1, \dots$; $s = 1, 2, \dots$

De l'hypothèse que les espaces X_1 et X_2 sont des espaces completes il résulte que les suites $\left(x_1^{(n)} \right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(x_2^{(n)} \right)_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

En passant à la limite pour $s \rightarrow \infty$ nous déduisons de (11)

$$(12) \quad \begin{aligned} \rho_1 \left(\bar{x}_1, x_1^{(n)} \right) &\leq \frac{d_1 p_1^n}{1-p_1} \\ \rho_2 \left(\bar{x}_2, x_2^{(n)} \right) &\leq \frac{d_1 h_1 p_1^n}{1-p_1} \end{aligned}$$

Il en résulte, pour $n = 0$, que $\bar{x}_1 \in S_1$ et $\bar{x}_2 \in S_2$. Nous montrerons que (\bar{x}_1, \bar{x}_2) est la seule solution du système (1) à la propriété que $\bar{x}_1 \in S_1$ et $\bar{x}_2 \in S_2$.

Supposons par l'absurde que le système (1) a une autre solution (\bar{y}_1, \bar{y}_2) à la propriété $\bar{y}_1 \in S_1$, $\bar{y}_2 \in S_2$. En tenant compte de i., il en résulte les inégalités

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\bar{x}_1, \bar{y}_1 \right) &\leq \frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} \cdot \rho_1 \left(\bar{x}_1, \bar{y}_1 \right) \\ \rho_2 \left(\bar{x}_2, \bar{y}_2 \right) &\leq \frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} \cdot \rho_2 \left(\bar{x}_2, \bar{y}_2 \right) \end{aligned}$$

et de (5) il résulte que $\frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} < 1$. Par conséquent les inégalités ci-dessus ont lieu si et seulement si $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$ et $\bar{x}_2 = \bar{y}_2$. \square

Nous considérons à présent deux applications $F_1^* : D \rightarrow X_1$ et $F_2^* : D \rightarrow X_2$, où $D = D_1 \times D_2$.

Nous supposons que F_1^* , F_2^* , F_1 et F_2 vérifient les relations

$$(13) \quad \begin{aligned} \rho_1 \left(F_1^* (u, v), F_1 (u, v) \right) &\leq \delta_1 \\ \rho_2 \left(F_2^* (u, v), F_2 (u, v) \right) &\leq \delta_2 \end{aligned}$$

pour tout $(u, v) \in D$, où $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ sont des nombres donnés. En vue de résoudre le système (1) nous considérons à présent à la place du procédé (2) la procédure itérative suivante:

$$(14) \quad \begin{aligned} \xi_1^{(n+1)} &= F_1 \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)} \right) \\ \xi_2^{(n+1)} &= F_2 \left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_2^{(n)} \right), \quad n = 0, 1, \dots, \xi_1^{(0)} = x_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} = x_2^{(0)}, \end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous procéderons à la délimitation des erreurs au cas où pour la résolution du système (1) nous utilisons à la place du procédé

(2) le procédé (14). Nous écrivons

$$(15) \quad \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} \\ \theta_2 &= \frac{(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} \end{aligned}$$

et désignons par S_1^*, S_2^* les ensembles suivants:

$$(16) \quad \begin{aligned} S_1^* &= \left\{ x \in X_1 : \rho_1 \left(x, x_1^{(0)} \right) \leq d_1 + \frac{d_1}{1-p_1} + \theta_1 \right\} \\ S_2^* &= \left\{ x \in X_2 : \rho_2 \left(x, x_2^{(0)} \right) \leq d_1 h_1 + \frac{d_1 h_1}{1-p_1} + \theta_2 \right\}. \end{aligned}$$

Dans ces notations nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème 2. *Si les hypothèses du Théorème 1 sont satisfaites et si de plus les conditions suivantes sont remplies:*

- i₁. Les applications F_1, F_2, F_1^* et F_2^* remplissent les conditions (13);
- i₂. $S_1^* \subseteq D_1, S_2^* \subseteq D_2,$

alors quels que soient les nombres réels $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ qui vérifient les relations $\varepsilon_1 > 2\theta_1, \varepsilon_2 > 2\theta_2,$ il existe un $n' \in \mathbb{N}$ tel que $\rho_1 \left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)} \right) \leq \varepsilon_1,$ et $\rho_2 \left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)} \right) \leq \varepsilon_2$ pour tout $n > n'$ et, de plus, les propriétés suivantes sont vraies:

- j₁. $\xi_1^{(n)} \in S_1, \xi_2^{(n)} \in S_2$ pour tout $n = 1, 2, \dots;$
- j₂. Les inégalités suivantes sont vraies:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)} \right) &\leq \frac{\beta(a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2) + \alpha\varepsilon_1(1-b)}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_1}{2} \\ \rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)} \right) &\leq \frac{a(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2) + b\varepsilon_2(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_2}{2} \end{aligned}$$

pour tout $n > n',$ où (\bar{x}_1, \bar{x}_2) est la solution du système (1).

Démonstration. Nous montrerons d'abord que les propriétés j₁ sont vraies. Du fait que nous avons supposé que $\xi_1^{(0)} = x_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} = x_2^{(0)},$ il résulte de (14) et de i.

$$\begin{aligned}\rho_1 \left(x_1^{(1)}, \xi_1^{(1)} \right) &= \rho_1 \left(F_1 \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \right), F_1^* \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} \right) \right) \\ &\leq \delta_1 + \alpha \rho_1 \left(\xi_1^{(0)}, x_1^{(0)} \right) + \beta \rho_2 \left(\xi_2^{(0)}, x_2^{(0)} \right) = \delta_1\end{aligned}$$

En tenant compte de iii., nous en déduisons

$$\begin{aligned}\rho_1 \left(\xi_1^{(1)}, x_1^{(0)} \right) &\leq \rho_1 \left(\xi_1^{(1)}, x_1^{(1)} \right) + \rho_1 \left(x_1^{(1)}, x_1^{(0)} \right) \\ &\leq \delta_1 + d_1 \leq d_1 + \frac{d_1}{1-p_1} + \theta_1\end{aligned}$$

vu qu'évidemment $\delta_1 \leq \theta_1$, d'où il résulte $\xi_1^{(1)} \in S_1^*$.

Nous avons de manière analogue

$$\begin{aligned}\rho_2 \left(x_2^{(1)}, \xi_2^{(1)} \right) &= \rho_2 \left(F_2 \left(x_1^{(1)}, x_2^{(0)} \right), F_2^* \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(0)} \right) \right) \\ &\leq \delta_2 + a \rho_1 \left(\xi_1^{(1)}, x_1^{(1)} \right) + b \rho_2 \left(\xi_2^{(0)}, x_2^{(0)} \right) \leq \delta_2 + a \delta_1\end{aligned}$$

En tenant compte de iii. nous en déduisons

$$\rho_2 \left(\xi_2^{(1)}, x_2^{(0)} \right) \leq \rho_2 \left(\xi_2^{(1)}, x_2^{(1)} \right) + \rho_2 \left(x_2^{(1)}, x_2^{(0)} \right) \leq \delta_2 + a \delta_1 + d_1 h_1.$$

En tenant compte du fait que $\delta_2 + a \delta_1 \leq \theta_2$ il en résulte que

$$\rho_2 \left(\xi_2^{(1)}, x_2^{(0)} \right) \leq h_1 d_1 + \frac{h_1 d_1}{1-p_1} + \theta_2$$

et par conséquent $\xi_2^{(1)} \in S_2^*$.

Nous supposons à présent par induction que $\xi_1^{(n-1)} \in S_1^*$ et $\xi_2^{(n-1)} \in S_2^*$.

Nous avons alors

$$(17) \quad \begin{aligned}\rho_1 \left(\xi_1^{(n)}, x_1^{(n)} \right) &= \rho_1 \left(F_1 \left(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)} \right), F_1^* \left(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)} \right) \right) \\ &\leq \alpha \rho_1 \left(x_1^{(n-1)}, \xi_1^{(n-1)} \right) + \beta \rho_2 \left(x_2^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)} \right) + \delta_1\end{aligned}$$

et

$$(18) \quad \begin{aligned}\rho_2 \left(\xi_2^{(n)}, x_2^{(n)} \right) &= \rho_2 \left(F_2 \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n-1)} \right), F_2^* \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n-1)} \right) \right) \\ &\leq a \rho_1 \left(x_1^{(n)}, \xi_1^{(n)} \right) + b \rho_2 \left(x_2^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)} \right) + \delta_2.\end{aligned}$$

On montre par induction, à partir des relations ci-dessus, que

$$(19) \quad \begin{aligned} \rho_1 \left(\xi_1^{(n)}, x_1^{(n)} \right) &\leq d_1 h_1^{n-1} \cdot k_1^{n-1} + \theta_1 \\ \rho_2 \left(\xi_2^{(n)}, x_2^{(n)} \right) &\leq d_1 h_1^n \cdot k_1^{n-1} + \theta_2, \end{aligned}$$

d'où nous déduisons:

$$\rho_1 \left(\xi_1^{(n)}, x_1^{(0)} \right) \leq \rho_1 \left(\xi_1^{(n)}, x_1^{(n)} \right) + \rho_1 \left(x_1^{(n)}, x_1^{(0)} \right) \leq d_1 + \frac{d_1}{1-p_1} + \theta_1$$

et

$$\rho_2 \left(\xi_2^{(n)}, x_2^{(0)} \right) \leq \rho_2 \left(\xi_2^{(n)}, x_2^{(n)} \right) + \rho_2 \left(x_2^{(n)}, x_2^{(0)} \right) \leq d_1 h_1 + \frac{d_1 h_1}{1-p_1} + \theta_2$$

c'est-à-dire $\xi_1^{(n)} \in S_1^*$, $\xi_2^{(n)} \in S_2^*$.

Des hypothèses du Théorème 2 et du fait que $\xi_1^{(n)} \in S_1^*$, $\xi_2^{(n)} \in S_2^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il résulte les relations suivantes:

$$\rho_1 \left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)} \right) \leq \alpha \rho_1 \left(\xi_1^{(n)}, \xi_1^{(n-1)} \right) + \beta \rho_2 \left(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)} \right) + 2\delta_1$$

et

$$\rho_2 \left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)} \right) \leq a \rho_1 \left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)} \right) + b \rho_2 \left(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)} \right) + 2\delta_2$$

pour $n = 0, 1, \dots$

Des inégalités ci-dessus nous déduisons les inégalités suivantes:

$$(20) \quad \begin{aligned} \rho_1 \left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)} \right) &\leq d_1 h_1^{n-1} \cdot k_1^{n-1} + 2\theta_1 \\ \rho_2 \left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)} \right) &\leq d_1 h_1^n \cdot k_1^{n-1} + 2\theta_2, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

On déduit immédiatement de (20) que si $\varepsilon_1 > 2\theta_1$, et $\varepsilon_2 > 2\theta_2$, alors il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > n'$ $\rho_1 \left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)} \right) \leq \varepsilon_1$ et $\rho_2 \left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)} \right) \leq \varepsilon_2$ c'est-à-dire que le procédé itératif (14) peut être arrêté alors que la distance entre deux itérations successives est suffisamment petite.

Nous évaluerons à présent les distances entre les solutions \bar{x}_1 et \bar{x}_2 du système (1) et les éléments des suites $\left(\xi_1^{(n)} \right)_{s=0}^{\infty}$, respectivement

$(\xi_2^{(n)})_{s=0}^{\infty}$. Nous supposons que le procédé itératif (14) est arrêté lorsque $\rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) \leq \varepsilon_1$ et $\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) \leq \varepsilon_2$.

En tenant compte de ce qui a été démontré ci-dessus et des hypothèses du Théorème 2, nous avons:

$$\begin{aligned}\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) &\leq \alpha \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)}) + \beta \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_1 \\ \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) &\leq a \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) + b \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_2\end{aligned}$$

Il résulte des inégalités ci-dessus

$$\begin{aligned}(1 - \alpha) \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) &\leq \alpha \varepsilon_1 + \beta \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_1 \\ (1 - b) \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) &\leq a \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) + b \varepsilon_2 + \delta_2\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(21) \quad \begin{aligned}\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) &\leq \frac{\alpha \varepsilon_1}{1 - \alpha} + \frac{\beta}{1 - \alpha} \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \frac{\delta_1}{1 - \alpha} \\ \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) &\leq \frac{a}{1 - b} \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) + \frac{b \varepsilon_2}{1 - b} + \frac{\delta_2}{1 - b}\end{aligned}$$

d'où il résulte

$$(22) \quad \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) \leq \frac{a(\alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2) + b(1 - \alpha) \varepsilon_2}{(1 - \alpha)(1 - b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Du fait que $n > n' + 1$, il s'ensuit que la seconde inégalité de (21) est également vraie si nous remplaçons $n + 1$ par n , c'est-à-dire que

$$\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) \leq \frac{a}{1 - b} \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)}) + \frac{b \varepsilon_2}{1 - b} + \frac{\delta_2}{1 - b}$$

inégalité qui associée à l'inégalité de (21) nous donne

$$(23) \quad \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) \leq \frac{\beta(a \varepsilon_1 + b \varepsilon_2) + \alpha(1 - b) \varepsilon_1}{(1 - \alpha)(1 - b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Păvăloiu, I., *Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1976. ← available soon, refresh and click here
- [2] Păvăloiu, I., *La resolution des systèmes operationnelles à l'aide des méthodes itératives*, *Mathematica*, 11(34), (1969), 137–141. ← clickable
- [3] Păvăloiu, I., *Estimation des erreurs dans la résolution numérique des systèmes d'équations dans des espaces métriques*, *Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods*, Preprint Nr. 1, (1987), 121–129. ← clickable
- [4] Păvăloiu, I., *La convergence de certaines méthodes itératives pour résoudre certaines équations operatorielles*, *Seminar on Functional analysis and Numerical Methods*, Preprint Nr. 1 (1986), 127–132. ← clickable
- [5] Traub, J. F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall Series in Automatic Computation, Englewood Cliffs, N. J. (1964).
- [6] Urabe, M., *Convergence of numerical iteration in solution of equations*, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 19 (1956), 479–489.
- [7] Urabe, M., *Error estimation in numerical solution of equations by iteration process*, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I*, 26, (1962), 77–91.

Résumé

Dans ce travail on fournit des délimitations pour les erreurs commises dans la résolution numérique à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel -d'un système de deux équations à deux inconnues dans des espaces métriques.

Si (X_i, ρ_i) , $i = 1, 2$, sont deux espaces métriques complets et $F_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ et $F_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ deux applications, alors on applique en vue de la résolution du système $x_1 = F_1(x_1, x_2)$, $x_2 = F_2(x_1, x_2)$, la méthode de Gauss-Seidel et on donne des conditions suffisantes pour la convergence du procédé utilisé.

On désigne par $D_1 \subset X_1$ et $D_2 \subset X_2$ deux ensembles bornées de X_1 et X_2 et on considère ensuite deux opérateurs $F_1^* : D_1 \times D_2 \rightarrow X_1$ $F_2^* : D_1 \times D_2 \rightarrow X_2$ qui vérifient par rapport à F_1 et F_2 les conditions: $\rho_1(F_1(x_1, x_2), F_1^*(x_1, x_2)) \leq \varepsilon_1$, $\rho_2(F_2(x_1, x_2), F_2^*(x_1, x_2)) \leq \varepsilon_2$ pour

chaque $(x_1, x_2) \in D_1 \times D_2$. Dans ces conditions on applique en vue de la résolution du système initial la méthode de Gauss-Seidel au système $x_1 = F_1^*(x_1, x_2)$, $x_2 = F_2^*(x_1, x_2)$. Dans ces conditions on donne des délimitations de la distance entre la solution du système et la solution approximative.

Ion Păvăloiu
Institutul de Matematică
Oficiul Poștal 1
C.P. 68
3400 Cluj-Napoca
Romania

This Note is in final form and no version of it is or will be submitted for publication elsewhere.