

"Babeş-Bolyai" University
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1, 1989, pp.105-110

**SUR UNE MÉTHODE DE TYPE STEFFENSEN
UTILISÉE POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS
OPÉRATIONNELLES NON-LINÉAIRES**

par
ION PĂVĂLOIU

Soit X un espace de Banach et Y un espace linéaire normé. Pour la résolution de l'équation

$$(1) \quad P(x) = \theta$$

où $P : X \rightarrow Y$ est un opérateur, et θ est l'élément nul de l'espace Y , nous considérons les méthodes itératives suivantes:

$$(2) \quad x_{n+1} = Q_1(x_n) - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); P]^{-1} P(Q_1(x_n))$$

ou

$$(3) \quad x_{n+1} = Q_2(x_n) - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); P]^{-1} P(Q_2(x_n))$$

Dans les relations (2) et (3) Q_1 et Q_2 sont deux opérateurs itératifs attachés à l'équation (1) et par $[x, y : P]$ nous avons désigné la différence divisée de l'opérateur P sur les noeuds $x, y \in X$, [2], [3].

Pour préciser nous imposerons aux opérateurs Q_1 et Q_2 les conditions suivantes:

- a) Si \bar{x} est une solution de l'équation (1) alors on a $\bar{x} = Q_1(\bar{x})$ et $\bar{x} = Q_2(\bar{x})$ et réciproquement, si \bar{x} est un point fixe pour les opérateurs Q_1 et Q_2 alors \bar{x} est une solution de l'équation (1);

- b) il existe les nombres $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ tels que pour chaque $x \in X$ on a les inégalités suivantes:

$$\|Q_1(x) - x\| \leq \beta_1 \|P(x)\|, \quad \|Q_2(x) - x\| \leq \beta_2 \|P(x)\|;$$

- c) il existe les nombres réels et positifs $\alpha_1 < \alpha_2$ et aussi les nombres naturels k_1 , k_2 tels que pour chaque $x \in X$ on a les inégalités suivantes:

$$\|P(Q_1(x))\| \leq \alpha_1 \|P(x)\|^{k_1}, \quad \|P(Q_2(x))\| \leq \alpha_2 \|P(x)\|^{k_2}.$$

On constate facilement que dans le cas où l'on part du même élément initial $x_0 \in X$, les méthodes itératives (2) et (3) fournissent la même suite d'approximations de la solution de l'équation (1).

Par la suite nous étudierons la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ obtenu à l'aide de la méthode (2) ou (3).

Théorème 1. Soit $x_0 \in X$, $\delta > 0$ et $S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta\}$

Si on peut choisir l'élément initial x_0 , le nombre réel δ et les applications Q_1 et Q_2 tels que:

- i) les applications Q_1 et Q_2 remplissent la condition a);
- ii) $Q_1(S) \subseteq S$, $Q_2(S) \subseteq S$;
- iii) les applications Q_1 , Q_2 et P remplissent les conditions b) et c) pour chaque $x \in S$;
- iv) pour chaque $x, y \in S$ il existe $[x, y; P]^{-1}$ et il existe le nombre $B > 0$, tel que pour chaque $x, y \in S$ on ait $\|[x, y; P]^{-1}\| \leq B$;
- v) il existe le nombre $M > 0$, tel que pour chaque $x, y, z \in S$ on a $\|[x, y, z; P]\| \leq M$;
- vi) $\varepsilon_0 = (MB^2\alpha_1\alpha_2)^{1/(q-1)} \cdot \|P(x_0)\| < 1$ où $q = k_1 + k_2$;
- vii) $\rho^{\frac{1}{q-1}} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_0^{q^{i-1}} \left(B\alpha_1\rho^{\frac{k_1-1}{1-q}} \varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)} + \beta_1 \right) \leq \delta$ où $\rho = MB^2\alpha_1\alpha_2$,

alors on a les propriétés suivantes:

- j) la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue à l'aide de la méthode (2) ou à l'aide de la méthode (3) est convergente et si nous désignons par \bar{x} la limite de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, alors on a $P(\bar{x}) = \theta$;
- jj) si nous désignons par ε_n -l'expression $\rho^{\frac{1}{q-1}} \|P(x_n)\|$, alors on a $\varepsilon_n \leq \varepsilon_0^{q^n}$ pour chaque $n = 0, 1, \dots$;
- jjj) on a l'inégalité suivante:

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq B \cdot \varepsilon_0^{q^n} \cdot \rho^{\frac{1}{1-q}},$$

pour chaque $n = 0, 1, 2, \dots$

Démonstration. Prouvons d'abord que dans les hypothèses du théorème les éléments de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à l'ensemble S .

En effet, de (2) nous déduisons:

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_0\| &\leq \|x_1 - Q_1(x_0)\| + \|Q_1(x_0) - x_0\| \\ &\leq \beta_1 \|P(x_0)\| + B \|P(Q_1(x_0))\| \\ &\leq (\beta_1 + B\alpha_1 \|P(x_0)\|^{k_1-1}) \|P(x_0)\| \\ &= \varepsilon_0 \rho^{\frac{1}{1-q}} \left(\beta_1 + B\alpha_1 \varepsilon_0^{k_1-1} \cdot \rho^{\frac{k_1-1}{1-q}} \right) \leq \delta \end{aligned}$$

d'où il résulte que $x_1 \in S$.

En tenant compte de l'identité

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P(Q_1(x_0)) + [Q_1(x_0), Q_2(x_0); P](x_1 - Q_1(x_0)) \\ &\quad + [Q_1(x_0), Q_2(x_0), x; P](x_1 - Q_1(x_0))(x_1 - Q_2(x_0)) \end{aligned}$$

et de (2), il résulte:

$$\begin{aligned}
\|P(x_1)\| &\leq M \|x_1 - Q_1(x_0)\| \cdot \|x_1 - Q_2(x_0)\| \\
&\leq MB^2 \alpha_1 \alpha_2 \cdot \|P(x_0)\|^q \leq \rho \cdot \rho^{\frac{q}{1-q}} \cdot \varepsilon_0^q \\
&= \rho^{\frac{1}{1-q}} \cdot \varepsilon_0^q
\end{aligned}$$

d'où il résulte:

$$\rho^{\frac{1}{1-q}} \|P(x_1)\| \leq \varepsilon_0^q$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0^q.$$

Supposons que les éléments $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$,

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_0^{q^i}$$

et démontrons que $x_{n+1} \in S$ et $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_0^{q^{n+1}}$.

En effet on a:

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\|x_i - x_{i-1}\| &\leq \|x_i - Q_1(x_{i-1})\| + \|Q_1(x_{i-1}) - x_{i-1}\| \\
&\leq B\alpha_1 \|P(x_{i-1})\|^{k_1} + \beta_1 \|P(x_{i-1})\| \\
&\leq \varepsilon_{i-1} \cdot \rho^{\frac{1}{1-q}} \left(\beta_1 + B\alpha_1 \varepsilon_{i-1}^{k_1-1} \cdot \rho^{\frac{k_1-1}{1-q}} \right) \\
&\leq \varepsilon_0^{q^{i-1}} \cdot \rho^{\frac{1}{1-q}} \left(\beta_1 + B\alpha_1 \cdot \varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)} \rho^{\frac{k_1-1}{1-q}} \right)
\end{aligned}$$

d'où nous déduisons que

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \delta$$

c'est-à-dire que $x_{n+1} \in S$.

Par suite on a:

$$\|P(x_{n+1})\| \leq MB^2\alpha_1\alpha_2 \|P(x_n)\|^q \leq \rho \cdot \rho^{\frac{q}{1-q}} \cdot \varepsilon_n^q$$

d'où il résulte l'inégalité

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^q$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_0^{q^{n+1}}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous démontrerons maintenant que la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ fournie par la relation (2) est fondamentale.

En effet pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on a:

$$\begin{aligned} \|x_{n+k} - x_n\| &\leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \|x_i - x_{i-1}\| \\ &\leq \varepsilon_0^{q^n} \cdot \rho^{\frac{1}{1-q}} \sum_{i=n+1}^{n+k} \varepsilon_0^{q^{i-1-q^n}} \left(B\alpha_1 \rho^{\frac{k_1-1}{1-q}} \cdot \varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)} + \beta_1 \right) \end{aligned}$$

ce qui exprime que la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est fondamentale.

Soit $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; alors de l'inégalité ci-dessus où nous posons $n = 0$ et faisons $k \rightarrow \infty$, il résulte que

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \delta$$

c'est-à-dire $\bar{x} \in S$.

De l'inégalité

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_0^{q^n}$$

il résulte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P(x_n)\| = 0$$

c'est-à-dire $P(\bar{x}) = \theta$, égalité qui exprime le fait que \bar{x} est une solution de l'équation (1).

De l'identité

$$P(\bar{x}) - P(x_n) = [\bar{x}, x_n; P](\bar{x} - x_n)$$

il résulte que

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq B \|P(x_n)\| \leq B \cdot \rho^{\frac{1}{1-q}} \varepsilon_0^q.$$

Le théorème est donc démontré. \square \square

BIBLIOGRAPHIE

clickable →

- [1] Păvăloiu, I., *Asupra operatorilor iterativi*, Studii și Cercetări Matematice, 23 (1971), 10, 1537–1544.
- [2] Păvăloiu, I., *Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor*, Ed. Dacia, 1976.
- [3] Ul'm, S., *Ob oboboscennyh rezdelennih reznostiak I*, Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR 16 (1867), 1, 13–36.

available soon,
refresh and click here →

Institutul de Calcul
Oficiul Poștal 1
C.P. 68
3400 Cluj-Napoca
Romania

This paper is in final form and no version of it is or will be submitted for publication elsewhere.